

SCENARI | #23

DICEMBRE
2025

Rivista di estetica e metafisica

SCENARI

Direttori

Petar Bojanić (University of Belgrade)

Luca Taddio (Università degli Studi di Udine)

Vice-Direttore

Stefano Marino (Alma Mater Studiorum – Università di Bologna)

Marcello Ghilardi (Università degli Studi di Padova)

Redazione

Valentina Antoniol (Università degli Studi di Bari Aldo Moro) / Marcello Barison (Libera Università di Bolzano) / Emma Lavinia Bon (Università del Piemonte Orientale) / Lorenza Bottacin Cantoni (Università Vita-Salute San Raffaele di Milano) / Andrea Colombo (Università di Rijeka) / Damiano Cantone (Sapienza Università di Roma) / Floriana Ferro (Università degli Studi di Udine) / Simone Furlani (Università degli Studi di Udine) / Alberto Giacomelli (Università degli Studi di Padova) / Sonia Maria Lisco (Libera Università di Bolzano) / Emanuela Magno (Università degli Studi di Padova) / Giovanni Mugnaini (Alma Mater Studiorum – Università di Bologna) / Federica Negri (Iusve) / Chiara Pasqualin (Universität Koblenz-Landau) / Roberto Revello (Università degli Studi dell'Insubria) / Snežana Vesnić (Univerzitet u Beogradu) / Rolando Vitali (Alma Mater Studiorum – Università di Bologna e Università di Jena)

Comitato scientifico

Marcello Barison (Libera Università di Bolzano) / Silvia Capodivacca (Università Pegaso) / Felice Cimmatti (Università della Calabria) / Emanuele Cocchia (École des hautes études en sciences sociales

– Ehess) / Mario De Caro (Università degli Studi Roma Tre) / Massimo Donà (Università Vita-Salute San Raffaele di Milano) / Enrico Fongaro (Università Nazan di Nagoya, Giappone) / Giacomo Fronzi (Università del Salento) / Samir Gandesha (Simon Fraser University of Vancouver) / Johan F. Hartle (Staatliche Hochschule für Gestaltung Karlsruhe) / Micaela Latini (Università degli Studi dell'Insubria) / Giovanni Leghissa (Università degli Studi di Torino) / Gianfranco Marrone (Università degli Studi di Palermo) / Roberto Masiero (Università Iuav di Venezia) / Andrea Mecacci (Università degli Studi di Firenze) / Nickolas Pappas (City University of New York) / Luigi Perissinotto (Università Ca' Foscari di Venezia) / Lars Rensmann (Rijksuniversiteit Groningen) / Vicente Sanfelix (Universitat de València) / Richard Shusterman (Florida Atlantic University) / Francesco Valagussa (Università Vita-Salute San Raffaele di Milano) / Vincenzo Vitiello (Università Vita-Salute San Raffaele di Milano) / Jean-Jacques Wunenburger (Université Jean Moulin Lyon 3)

Tutti i saggi scientifici vengono sottoposti a double-blind peer review

“Scenari” è presente nell'elenco delle riviste scientifiche per le aree 11 e 14 e di Classe A per l'area 11 (Settore 11/C4 – Estetica e Filosofia del linguaggio) dell'Agenzia Nazionale di Valutazione del Sistema Universitario e della Ricerca (ANVUR).

Risulta inoltre indicizzata in:

- Catalogo Italiano dei Periodici (ACNP)
- ERIH PLUS
- The Philosopher's Index

MIMESIS EDIZIONI (Milano – Udine)

www.mimesisedizioni.it

© 2025 – MIM EDIZIONI SRL

Piazza Don Enrico Mapelli, 75

20099 Sesto San Giovanni (MI)

Phone: +39 02 24861657 / 21100089

mimesis@mimesisedizioni.it

Isbn: 9791222331119

ISSN print 2420-8914

ISSN online 2785-3020

Autorizzazione del Tribunale di Milano n. 24 del 30 gennaio 2015.

Illustrazione di copertina di Renato Calligaro.

Indice

Filosofia e matematica: un percorso tra ontologia, epistemologia, estetica e tecnica

A cura di Andrea Colombo e Lorenzo Marannino

7	Introduzione
11	Introduction
15	Albino Attilio Lanciani, Marco Rigoli, <i>Quelques remarques phénoménologiques sur la beauté dans les mathématiques</i>
45	Sofia Cattani, <i>La bellezza delle dimostrazioni matematiche nella filosofia critica di Kant</i>
61	Fabio Sterpetti, <i>Concezione assiomatica, dimostrazioni formali e meccanizzabilità della matematica</i>
85	Giulio Amore, <i>Turing filosofo trascendentale: computazione, macchine intelligenti e razionalità</i>
101	Nicola Turrini, <i>Abitare l'incomputabile. Alcune considerazioni sul programma di ricerca di Alan Turing</i>
119	Deborah De Rosa, <i>Notes for a mathematical aisthesis: from Gestalt to language</i>
133	Lorenzo Marannino, <i>The Problem of Mathematical Objects in Merleau-Ponty's Phenomenology</i>

149	Riccardo Valenti, <i>Exploring The Origin of Geometry Through an Enactivist Lens: An Inquiry into Diachronic Group Formation and Collaborative Dynamics in Real-Time and Phase-Delayed Interactions</i>
171	Andrea Colombo, <i>Morphogenesis without Structure? Deleuze and René Thom</i>
187	Charles Alunni, Francesco La Mantia, Fernando Zalamea, <i>Dynamic Platonism: Mathematics, Gesture, and Philosophy</i>
217	Nicola Gianola, <i>Idee per una decostruzione del platonismo matematico a partire da Wittgenstein</i>
237	Domenico Licciardi, <i>Plasticità del virtuale e problema del continuo</i>
263	Biografie autori

**Filosofia e matematica: un percorso tra ontologia,
epistemologia, estetica e tecnica**

A cura di Andrea Colombo e Lorenzo Marannino

Introduzione

Il confronto della filosofia con la matematica risale alla loro contemporanea nascita nel pensiero greco e non ha cessato di stimolare modalità originali di riflessione sugli enigmi posti dallo statuto e dalla costituzione delle idealità matematiche. Pur con la crescente specializzazione e ramificazione delle scienze, fino a oggi non sono mancati pensatori che sono stati capaci di offrire contributi importanti in entrambe le discipline.

Sono molteplici gli orizzonti entro i quali la filosofia ha indagato la matematica. A un primo livello, ontologico, si è posta la domanda intorno allo statuto d'essere delle idealità matematiche. Dal *Timeo* di Platone sino alla fisica contemporanea, il problema di comprendere se e in quale modalità gli oggetti matematici *appartengano* al mondo è stato oggetto di accesi dibattiti. Nel Novecento, contro le spiegazioni metafisiche o psicologistiche, il tentativo di coniugare l'oggettività e la necessità delle oggettualità matematiche con il loro essere egualmente un prodotto genetico della soggettività è stato intrapreso dalla fenomenologia di Husserl, che ha studiato le dinamiche intenzionali entro cui le idealità si costituiscono, imprimendo una svolta agli studi sul tema e inaugurando un approccio che ha portato frutti anche in ambito epistemologico ed estetico. Seguendo Husserl, diversi autori ascrivibili alla tradizione fenomenologica hanno cercato di rendere conto dei caratteri essenziali delle idealità matematiche e delle modalità della loro intuizione.

La filosofia ha intrattenuto un confronto serrato con la matematica anche da un punto di vista metodologico. Cartesio, Pascal e soprattutto Spinoza hanno assunto la certezza della scienza matematica a modello epistemologico cui fare riferimento con lo scopo di costituire una filosofia assolutamente fondata e rigorosamente dimostrata. Un tentativo che è sembrato tramontare definitivamente nelle pagine della *Prefazione* della *Fenomenologia dello spirito* di Hegel, in cui si mette in guardia dall'importazione del metodo assiomatico-deduttivo in ambito filosofico e si riafferma la necessità di un pensiero filosofico che si muova libero da postulati già posti. La stessa logica hegeliana non è infatti altro che l'ultimo grande sforzo di valicare il problema che logica classica e mate-

matica non hanno mai pienamente potuto risolvere: la dimostrazione del fondamento.

La riflessione sulle oggettualità matematiche ha inoltre trovato uno spazio importante anche in ambito estetico, non solo riguardo al ruolo preminente delle proporzioni matematiche nelle arti figurative, nell'architettura o nella musica, ma anche in relazione alla pratica concreta della dimostrazione matematica. Se già Kant si era interrogato sulla possibilità della bellezza degli oggetti matematici e delle dimostrazioni, in tempi più recenti diversi autori hanno riflettuto su questo tema. Come ha mostrato, tra gli altri, il matematico e fenomenologo Gian-Carlo Rota, vi è infatti una particolare dimensione di bellezza che pertiene alla struttura di una dimostrazione e che costituisce un metro di giudizio nella valutazione della prova stessa.

In ultima istanza, le innovazioni del mondo dell'informatica hanno aperto alla riflessione filosofica un ulteriore orizzonte di domande. Esse riguardano la possibilità che le nuove cosiddette Intelligenze Artificiali siano capaci di portare reali progressi in ambito matematico, cioè se, oltre a produrre con metodi probabilistici un numero elevato di congetture, siano in grado di elaborare nuove dimostrazioni mai realizzate e "inventare" nuovi oggetti matematici. La risposta al problema in questione avrebbe certamente riflessi sia sul modo in cui concepiamo lo statuto delle oggettualità della matematica, sia sulle modalità in cui pensiamo il rapporto tra l'intelligenza umana e la macchina. Non è un caso inoltre che il lavoro dei pionieri delle macchine computazionali, quali Alan Turing, sia oggi al centro di importanti ricerche in campo sia filosofico che matematico.

I saggi raccolti in questo numero provano a esplorare queste problematiche da diversi punti di vista, storiografici e teoretici. Se è vero infatti che il confronto con la matematica interessa la filosofia sin dalle sue origini, va considerato come oggi esso sia al centro di un vivo dibattito che interseca le varie dimensioni precedentemente presentate: teoretica, epistemologica, fenomenologica, estetica, tecnica.

Albino Attilio Lanciani e Marco Rigoli, nel loro ricco articolo, riflettono sulla dimensione estetica della matematica. Si propongono infatti di offrire una definizione di ciò che si intende per "bel teorema" o "bella dimostrazione" attraverso un'interrogazione diretta della prassi matematica e dei matematici stessi, quali "soggetti" del lavoro matematico, cioè coloro che, praticandola e comprendendola, possono pienamente esperire la bellezza della matematica.

La relazione tra matematica ed estetica è al centro anche del contributo di Sofia Cattani, che si concentra sulla riflessione kantiana riguardo alla bellezza degli oggetti e delle dimostrazioni matematici, cercando di risolvere alcune ambiguità presenti nella rapida trattazione svolta da

Kant nel § 62 della *Critica della facoltà di giudizio*, attraverso la ripresa di alcuni elementi della *Critica della ragion pura*.

Nel suo saggio, Fabio Sterpetti prova a rispondere al quesito circa la possibilità da parte di sistemi meccanizzati di progredire la conoscenza matematica. Per fare ciò, si confronta criticamente con la concezione assiomatica della matematica, che è l'unica che permetterebbe di fondare la possibilità della meccanizzazione delle dimostrazioni.

Su una linea di ricerca affine si situa l'articolo di Giulio Amore, che si confronta con le opere di Alan Turing dedicate alle macchine intelligenti, con lo scopo di individuare in esse un'indagine interpretabile secondo i problemi della filosofia trascendentale. L'intento è di mostrare come la computazione non si limiti a partecipare ai processi razionali, ma costituisca essa stessa una forma di razionalità.

Anche Nicola Turrini propone un saggio sul pensiero di Alan Turing, in cui evidenzia come le ricerche del matematico inglese nel campo della logica matematica, in particolare in relazione all'*Entscheidungsproblem* di David Hilbert, e delle macchine di calcolo siano fondamentali per capire il suo programma di ricerca sulla possibilità di un'intelligenza artificiale.

Deborah De Rosa, invece, elabora un percorso tra la *Gestalttheorie* e la fenomenologia, in particolare quella di Maurice Merleau-Ponty, concentrandosi sul possibile nesso tra i processi creativi matematici e le forme (*Gestalten*) rilevabili durante tali processi, ponendo in relazione dimostrazione, linguaggio e dimensione estetica.

Lorenzo Marannino, da una prospettiva affine, si occupa nel suo saggio di mostrare il ruolo che ha la trattazione della matematica nell'opera di Maurice Merleau-Ponty e di inquadrare, attraverso di essa, una linea di ricerca potenzialmente produttiva per offrire una trattazione fenomenologica esaustiva delle modalità di intuizione e costituzione delle oggettualità matematiche.

Una ricerca di tipo fenomenologico è svolta anche dall'articolo di Riccardo Valenti, che propone una lettura dell'*Origine della geometria* di Husserl combinata a una prospettiva enattivista e alla teoria del *participatory sense-making*. Lo scopo è riflettere sulla dimensione costitutiva dell'intersoggettività e del medium della scrittura nella produzione del sapere matematico.

Nel suo contributo, Andrea Colombo analizza il rapporto tra Gilles Deleuze e la matematica a partire dal confronto con la teoria delle catastrofi di René Thom, con particolare attenzione all'opera *La piega. Leibniz e il barocco*. L'articolo sostiene che Deleuze non miri in alcun modo a costruire una filosofia della matematica, ma utilizzi concetti e modelli matematici come casi-limite per pensare il problema della morfogenesi e il rapporto tra scienza e filosofia. Attraverso una ricostruzione della morfogenesi strutturale in Thom e nelle sue estensioni (in particolare in Jean

Petitot), si mostra come Deleuze conduca tale paradigma fino al punto in cui esso non può più rendere conto della genesi del reale, aprendo così a una concezione di morfogenesi senza struttura, fondata su variazione intensiva e differenziazione continua.

Charles Alunni, Francesco La Mantia, Fernando Zalamea sviluppano, in un saggio dal respiro esplicitamente teoretico, il concetto di *Dynamic Platonism* come un quadro innovativo entro cui comprendere l'ontologia e la pratica matematica. In opposizione al platonismo tradizionale e conciliando diversi approcci, il *Dynamic Platonism* intende concentrarsi sul carattere fluido e storicamente situato delle idealità matematiche.

Il tema del platonismo matematico è trattato, in ottica critica, anche dall'articolo di Nicola Gianola, che si propone di decostruirlo attraverso le lenti offerte dal pensiero di Wittgenstein. Lo scopo è mostrare l'inconsistenza della posizione platonica in matematica, facendo leva sul ruolo costitutivo del linguaggio, della pratica dimostrativa e della modellizzazione pragmatica.

Domenico Licciardi si occupa di indagare il senso ontologico del concetto di "plasticità del virtuale", proposto da Sarti, Citti e Piotrowski in *Differential Heterogenesis*, connettendo tali analisi con la teoria delle percezioni oscure elaborata da Leibniz, con lo scopo di mostrare come la nozione di plasticità del virtuale possa essere pensata oltre l'opposizione tra continuità e contiguità.

Introduction

The relationship between philosophy and mathematics dates back to their joint emergence in Greek thought and has continued to stimulate new ways of reflecting on the nature and status of mathematical idealities. Even as the sciences have become increasingly specialised, several thinkers up to the present day have succeeded in making significant contributions to both fields.

Philosophy has approached mathematics from several angles. At an ontological level, it has raised the question of what kind of being mathematical idealities possess. From Plato's *Timaeus* to contemporary physics, debates have revolved around whether, and in what sense, mathematical objects belong to the world. In the twentieth century, Husserlian phenomenology sought to reconcile the objectivity and necessity of mathematical entities with their genetic origin in subjectivity. By examining the intentional structures through which idealities are constituted, Husserl opened a new path for later studies—one that proved fruitful not only in ontology but also in epistemology and aesthetics. Following him, various phenomenologists attempted to clarify the essential features of mathematical idealities and the forms of intuition through which they are grasped.

Philosophy has also engaged mathematics along methodological lines. Descartes, Pascal, and especially Spinoza treated the certainty of mathematics as an epistemic model for philosophy, hoping to build a system that was rigorously demonstrated from secure foundations. Hegel's Preface to the *Phenomenology of Spirit* famously calls this project into question, warning against importing the axiomatic–deductive method into philosophy and insisting that philosophical thinking must proceed without presupposed postulates. In this sense, Hegelian logic may be seen as the last major attempt to confront a problem that classical logic and mathematics have never fully resolved: providing a demonstration of their own foundational ground.

Aesthetic questions have likewise played an important role in philosophical reflections on mathematics. Beyond the well-known significance of mathematical proportions in the visual arts, architecture, and music,

philosophers have turned their attention to the practice of proof itself. Kant already raised the question of whether mathematical objects and demonstrations can be beautiful. More recently, several authors—including the mathematician and phenomenologist Gian-Carlo Rota—have argued that proofs have an internal aesthetic dimension, one that often plays a role in evaluating their quality.

Recent developments in computer science have opened yet another field of philosophical inquiry. The central question here is whether new forms of Artificial Intelligence might contribute to genuine mathematical progress. Beyond generating large numbers of conjectures through probabilistic methods, could they produce original proofs or even “invent” new mathematical objects? Any answer would have implications for our understanding of mathematical objectivity and for how we conceive the relation between human intelligence and machines. It is no accident that the work of early pioneers of computation, such as Alan Turing, has become a focal point of contemporary research in both philosophy and mathematics.

The essays collected in this issue examine these questions from a range of historical and theoretical perspectives. Although the dialogue between philosophy and mathematics is as old as philosophy itself, it is today the focus of an especially lively debate that brings together theoretical, epistemological, phenomenological, aesthetic, and technical concerns.

In their rich and insightful article, Albino Attilio Lanciani and Marco Rigoli reflect on the aesthetic dimension of mathematics. They aim to offer a definition of what is meant by a “beautiful theorem” or a “beautiful proof” by directly interrogating mathematical practice and mathematicians themselves, understood as the “subjects” of mathematical work—namely, those who, by practising and understanding it, are able fully to experience the beauty of mathematics.

The relationship between mathematics and aesthetics also lies at the heart of Sofia Cattani’s contribution, which focuses on Kant’s reflections on the beauty of mathematical objects and proofs. Her analysis seeks to resolve certain ambiguities present in Kant’s brief treatment of the issue in § 62 of the *Critique of the Power of Judgment* by drawing on elements from the *Critique of Pure Reason*.

Fabio Sterpetti addresses the question of whether mechanised systems can contribute to mathematical knowledge. His argument engages critically with the axiomatic conception of mathematics, which is often taken to provide the only viable basis for proof mechanisation.

In a related contribution, Giulio Amore examines Alan Turing’s writings on intelligent machines, reading them through the lens of transcendental philosophy. He aims to show that computation does not merely assist rational processes but constitutes a distinctive form of rationality.

Nicola Turrini likewise focuses on Turing, highlighting how his work

on mathematical logic—especially on Hilbert’s *Entscheidungsproblem*—and on computing machines is crucial for understanding his broader project concerning the possibility of artificial intelligence.

Deborah De Rosa approaches mathematics through both Gestalt theory and phenomenology, especially that of Maurice Merleau-Ponty. She investigates the connection between creative mathematical processes and the forms (*Gestalten*) that emerge within them, relating proof, language, and aesthetic experience.

Lorenzo Marannino also turns to Merleau-Ponty’s philosophy, examining the role of mathematics in his oeuvre and outlining a line of inquiry that may contribute to a more complete phenomenological account of the intuition and constitution of mathematical objects.

Riccardo Valenti offers another phenomenologically oriented study. His article combines a reading of Husserl’s *Origin of Geometry* with enactivism and the theory of participatory sense-making, to reflect on the constitutive relevance of intersubjectivity and writing in the production of mathematical knowledge.

In his contribution, Andrea Colombo examines the relationship between Gilles Deleuze and mathematics through a close engagement with René Thom’s catastrophe theory, with particular attention to *The Fold: Leibniz and the Baroque*. The article argues that Deleuze does not aim to develop a philosophy of mathematics, but rather mobilizes mathematical concepts and models as limit-cases for thinking morphogenesis and the relation between science and philosophy. By reconstructing structural morphogenesis in Thom and its extensions, particularly in the work of Jean Petitot, the paper shows how Deleuze pushes this paradigm to the point at which it can no longer account for the genesis of the real, thereby opening onto a conception of morphogenesis without structure, grounded in intensive variation and continuous differentiation.

Charles Alunni, Francesco La Mantia, and Fernando Zalamea develop the concept of Dynamic Platonism as an innovative framework for understanding mathematical ontology and practice. In contrast with traditional Platonism, Dynamic Platonism emphasises the fluid and historically situated character of mathematical idealities.

Nicola Gianola critically re-examines mathematical Platonism through the lens of Wittgenstein’s thought. By emphasising the constitutive role of language, proof practices, and pragmatic modelling, he aims to show the untenability of the Platonic position in mathematics.

Finally, Domenico Licciardi investigates the ontological significance of the “plasticity of the virtual,” a concept introduced by Sarti, Citti, and Piotrowski in *Differential Heterogenesis*. Drawing on Leibniz’s theory of obscure perceptions, he argues that the plasticity of the virtual can be understood beyond the opposition between continuity and contiguity.

Albino Attilio Lanciani

Marco Rigoli

Quelques remarques phénoménologiques sur la beauté dans les mathématiques

My work always tried to unite the true with the beautiful, but when I had to choose one or the other, I usually chose the beautiful.

Cité par Freeman Dyson in
Obituary for Hermann Weyl *Nature* (10 Mar 1956)

L'ambition de ce travail est de contribuer à la saisie de la beauté dans les mathématiques. Par rapport à d'autres travaux consacrés au même sujet, nous voudrions ici marquer une petite différence : nous n'essayerons pas de donner des interprétations éloignées du monde des mathématiques. Au contraire et de manière plus modeste, ce que nous intéresse est d'interroger les mathématiciens eux-mêmes au sujet de leur travail et de partir, pour notre analyse, de ce qu'ils considèrent beau dans leurs disciplines. En ce sens, lorsque nous leur demandons de clarifier ce que l'on peut entendre par une belle démonstration ou un beau théorème, nous obtenons des réponses diverses. Il faut d'ailleurs préciser dès le début que l'éclaircissement de la question – qu'est ce que la beauté dans les mathématiques ? – n'est pas immédiat, car son sens dépend strictement du lieu conceptuel à partir duquel la même question est posée. La première chose à faire est donc de mieux articuler notre problème, et ensuite, d'indiquer les deux difficultés risquant d'obscurcir notre questionnement dès le début :

1. Le problème des relations entre les mathématiques et un public non mathématique. La plupart des gens trouvent les mathématiques difficiles, compliquées, obscures et – il faut bien l'admettre – un peu arides. Ses secrets ne semblent pouvoir être interprétés que par quelques petits conventicules – *i. e.* les mathématiciens –

qui en connaissent les détails les plus intimes. De surcroît, pour le profane, entendre que les mathématiciens ont aussi des critères esthétiques pour apprécier les résultats de leur discipline est, en même temps, aussi bien surprenant que bizarre.

2. Le problème des relations du mathématicien avec son propre travail. Cela peut sembler étrange, mais d'habitude les mathématiciens ont la même attitude envers leur discipline que les peintres, les écrivains ou les musiciens lorsqu'ils s'expriment au sujet de leur art respectif.

Surtout en considérant ce dernier point, il a été souvent remarqué que les mathématiciens tendent à définir la beauté de leur discipline de manière tranchante. Si on les interroge à ce sujet, d'habitude, ils donnent la définition de la beauté des mathématiques par voie tout simplement prédictive. Au fond, leur manière de répondre peut sembler assez bizarre et habituellement elle se développe, dans la plupart des réponses, en deux phases : d'abord ils donnent une réplique du type : La beauté en mathématiques est. Le lecteur peut remplacer les points de suspension par un adjectif ou un substantif à son gré. Après ils effectuent, très souvent, une sorte de *saut conceptuel* et passent à la description d'un résultat qui leur paraît expliquer le sens de leur définition précédente. Un résultat qui, la plupart des fois, les a surpris et qu'ils essayent d'esquisser en tenant en compte, de manière présomptive, du niveau de connaissance mathématique de leur interlocuteur. Ils soulignent les éléments surprenants ou brillants de ce résultat et après ils reviennent à des définitions qui poussent vers une forme opératoire et souvent achèvent la question en rappelant que les mathématiques regardent au-delà de la beauté¹. Où ? Et là on a une grande difficulté à comprendre.

Au lieu d'une définition, fatalement inadéquate, nous essayerons de parcourir un chemin visant à un autre objectif : nous voudrions donner quelques éléments pour une phénoménologie de la beauté dans les mathématiques. Cette notion peut ainsi être interprétée en deux sens qui – du moins nous l'espérons – à la conclusion de ce travail devraient montrer une certaine convergence : dans un premier sens nous chercherons à montrer comment et où la beauté apparaît dans les mathématiques et aux mathématiciens et, ensuite, nous chercherons à interpréter ces données par les outils donnés par E. Husserl avec quelques éléments théoriques fondamentaux de la phénoménologie. Ces deux sens se présentent d'ailleurs presque toujours fort enchevêtrés.

Notre thèse de début – soulignons qu'il s'agit d'une thèse initiale : il n'y a pas de motivations contraignantes pour lesquelles elle devra rester

¹ Cela est d'autant plus étrange, car la première impression qu'on a est que les mathématiciens aiment discuter de la beauté dans leur discipline.

immuable jusqu'à la fin – peut être résumée de la manière suivante : *la beauté dans les mathématiques est donnée par la présence d'une pluralité de caractères qui peuvent ou bien apparaître tous ensemble ou bien singulièrement, mais en ce cas d'une manière particulièrement brillante.*

1. Premières remarques

Le rôle joué par une quelque forme d'idéal esthétique a été souvent souligné par le mathématicien dans son travail comme l'un des éléments qui conditionne aussi bien les méthodes que les directions dans la recherche mathématique. Le manque de beauté peut parfois indiquer une erreur dans la résolution d'un problème. Parfois ce manque signale qu'une solution satisfaisante doit être encore recherchée. Ainsi s'exprime C.F. Gauss dans ses *Disquisitiones arithmeticae* :

Lorsqu'on découvre un nouveau résultat [...], on ne peut pas [...] considérer la recherches d'autres preuves comme un luxe superflu. Souvent on n'arrive pas à la preuve la plus belle et la plus simple [...]. Pour ces raisons la quête d'une preuve nouvelle pour des vérités déjà connues est importante comme la découverte même.²

Cela exhibe clairement l'une des choses qui semble la plus étrange au non initié aux mathématiques convaincu de leur obscurité : pourquoi insiste-t-on pour prouver à nouveau un théorème qui a déjà été prouvé ?

Pensons par exemple à la suite des preuves du théorème de Pythagore ou, pour rester à C.F. Gauss lui-même, à la preuve du théorème fondamental de l'algèbre. C'est à ce sujet que la réponse de C.F. Gauss est surprenante : souvent une preuve supplémentaire est plus belle que la précédente, mais ce qu'il semble soutenir de manière implicite est que l'idée de beauté joue un rôle qui n'est pas exclusivement esthétique, mais – et cela est pour nous capital – cognitif aussi. Autrement dit, il semble que pour C.F. Gauss disposer d'une preuve plus *belle* implique qu'on en sait plus – notre connaissance est plus adéquate – au sujet d'un résultat démontré. La plus célèbre phrase qui semble bien indiquer ce guide constante de la part de la beauté est vraisemblablement celle de G. Hardy qui écrit :

La beauté est le premier test : il n'y a pas de place permanente dans ce monde pour des mathématiques laides.³

² C.F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, Yale University Press, New Haven, 1966 ; p. 65.

³ G. Hardy, *A mathematician's Apology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1940 ; p. 85.

La beauté et l'élégance ne sont pas des attributs frivoles ou non essentiels d'une théorie mathématiques ou, plus modestement, d'une preuve d'un théorème particulier ; au contraire, les deux contribuent à la manière dont la communauté des mathématiciens regarde la résolution d'un problème et évalue de manière très attentive quelles solutions peuvent être considérées comme les meilleures. Cela nous oblige à établir une différence entre la beauté et l'élégance mathématiques. Nous considérons cette dernière comme la capacité exprimée par un mathématicien d'enseigner ou d'appliquer une certaine théorie d'une manière claire. Autrement dit, clarté d'exposition, concision et rigueur sont synonymes d'élégance. Cela s'exprime le plus souvent dans les manifestations classiques du savoir mathématique : les salles de cours ou les articles. La beauté mathématique est beaucoup moins facile à cerner et, disons-le dès maintenant, on ne peut pas l'enseigner.

La beauté se révèle typiquement sous plusieurs facettes, souvent presque contradictoires. Il y a des éléments que la beauté partage avec l'élégance, par exemple, la brièveté, la clarté, etc. Mais, souvent, elle semble être plutôt une fonction de chaque résultat particulier. Les mathématiciens eux-mêmes ont essayé d'analyser les conditions de la beauté dans les mathématiques à partir de leurs points de vue personnels et l'unique chose sur laquelle ils sont peut-être d'accord est qu'il y a une relation – est-elle exhaustive ? – entre le goût personnel, la période historique et toute la gamme des qualités qui conduisent à décerner à un morceau des mathématiques le titre de beau.

Cela est en effet le problème principal. Comme on le sait, on ne peut pas sous-estimer, dans toute évaluation esthétique, le *background* des sujets impliqués et, plus généralement, le contexte culturel. En effet, pour déterminer ce qui est beau, la culture est déterminante. C'est à l'intérieur d'une certaine culture et par les moyens que cette même culture nous met à disposition que nous caractérisons comme *belle* une de ses productions. Il faut reconnaître que tout phénomène d'expression est encadré à partir de ce milieu commun – la culture qu'une communauté partage – qui conditionne aussi bien ce qu'on considère *beau* dans une culture quelconque et cela aussi bien de manière explicite – dans certaines cultures le thème de la beauté est essentiel – qu'implicite lorsque la culture en question ne vise pas à la beauté comme critère fondamental pour juger de la qualité de ses productions.

D'autre part il est clair que cela est plutôt le signe d'un problème philosophique que sa résolution. L'unique élément sur lequel on peut être d'accord est alors qu'il y a un quelque habitus culturel qui nous pousse à dire qu'une manifestation de l'esprit humain est belle et non triviale. Du point de vue philosophique, nous ne voulons pas expliquer pourquoi une pratique mathématique spécifique peut être définie neuve ou belle, mais,

simplement, décrire la manière de laquelle ces processus de sédimentation s'articulent et participent à la construction du sens.

Sur cette base, nous essayerons de faire un petit tour des critères suivant lesquels un produit mathématique pourra, ou ne pourra pas, être considéré beau par les mathématiciens eux-mêmes. Nous avons choisi de nous situer dans le contexte des mathématiques contemporaines – ou, du moins, du XX^e siècle – pour limiter les problèmes concernant les variations du goût en vertu desquelles certains morceaux des mathématiques autrefois considérés beaux ne le seraient plus aujourd'hui. C'est-à-dire que nous cherchons à adhérer le plus possible à l'horizon actuel de la recherche mathématique dans l'espoir de partager un horizon commun avec les mathématiciens d'aujourd'hui.

Par exemple, G. Hardy considère les critères esthétiques comme quelque chose d'inattendu où l'inévitabilité et l'économie de moyens jouent un rôle dans la détermination de la valeur d'un produit mathématique. Comme il a été souligné par N. Sinclair⁴, on peut considérer l'approche de G. Hardy comme privilégiant un sens évaluatif de l'esthétique. Cela n'empêche pas qu'il y ait d'autres thèses. Pour le montrer, nous donnons de suite deux définitions qui sont, du moins apparemment, plus pragmatiques et opératoires. Pour G.-C. Rota, la beauté en mathématiques consiste dans le pouvoir d'éclaircissement dont dispose un théorème, une preuve, qui nous est offerte par la compréhension de leur contenu :

Nous reconnaissons la beauté d'un théorème si nous voyons comment le théorème « s'installe bien » (« *fits* ») à sa place, comment il jette de la lumière autour de lui-même, comme une *Lichtung* [l'ascendance heideggerienne de ce terme est évidente], une clairière dans le bois.⁵

De son côté, pour H. Poincaré, la beauté a une relation avec le chemin accompli par un raisonnement choisi pendant la résolution d'un problème. Pour lui, la beauté et sa recherche sont responsables de la création de nouvelles idées et de nouvelles perspectives qui ne seraient pas ouvertes par une recherche conduite par voie purement logique.

De fait, nous pourrions énumérer, à la suite des mathématiciens, une longue suite de propriétés qu'un beau morceau de mathématiques

⁴ N. Sinclair, The aesthetic sensibility of Mathematicians, il s'agit du chapitre 4 de [N. Sinclair, D. Pimm, W. Higginson], *Mathematics and the Aesthetic. New Approaches to an Ancient Affinity*, CMS Books in Mathematics, vol. 25; Canadian Mathematical Society, Springer Verlag, 2006.

⁵ G.-C. Rota, Phénoménologie de la beauté mathématique, in *Phénoménologie discrète. Écrits sur les mathématiques, la science et le langage*, Mémoires des Annales de Phénoménologie, Beauvais, 2006, p. 86.

devrait avoir : profondeur conceptuelle, simplicité, clarté, originalité et ainsi de suite. Le résultat en est que nous sommes obligés de reconnaître à la beauté en mathématiques une signification plurivoque ; il s'agit d'un concept articulé et fort raffiné dont l'appréciation complète a besoin d'une connaissance de haut niveau et d'une finesse d'esprit de la part du mathématicien lui-même. Ce fait implique de manière évidente une première réponse à l'une des deux difficultés que nous avons signalées au début : pour un public non formé aux mathématiques, il est impossible d'apprécier les finesses d'une création mathématique tout comme, pour un public également non formé, il est impossible d'apprécier un tableau d'un maître du XX siècle qui paraîtra dépourvu de tout intérêt esthétique.

En ce sens, les mathématiques ne sont pas si différentes des arts en général. Il suffit de réfléchir à ce dont nous avons besoin pour apprécier un produit artistique du siècle qui vient de s'achever tels, par exemple, *Guernica* de P. Picasso ou la *Passacaglia op. 1* de A. Webern. Il n'y a pas beaucoup à faire : afin d'apprécier ces deux produits culturels, il faut avoir parcouru un long chemin. Il faut que nous disposions de la base grammaticale des deux arts que nous sommes en train de considérer, c'est-à-dire qu'il nous faut posséder les éléments principaux du langage musical et du langage pictural. En nous limitant à la musique, il nous faut imaginer ce qu'est une danse du dix-septième siècle – la *Passacaglia* – le chemin qu'elle a parcouru pour être intégrée à la tradition musicale, la manière par laquelle elle s'est imposée, par exemple dans l'œuvre de J.-S. Bach, comme la structure de base pour une suite d'élaborations artistiques successives. De surcroît, tout cela n'est pas encore suffisant : il nous faut aussi saisir comment une structure codifiée peut jaillir à nouveau et être recodée à partir de règles musicales (règles grammaticales) nouvelles. Seulement à partir de cet instant peut apparaître l'une des composantes essentielles de l'expérience esthétique : la sensibilité aux nouvelles applications créatives dont A. Webern nous donne une démonstration lumineuse. Certainement cette manipulation linguistique n'est pas l'unique composante de la beauté, mais elle joue un rôle important : la beauté de la *Passacaglia op. 1* concerne aussi la manière d'appliquer les règles consolidées par une tradition que par là même elle permet de dépasser. La grammaire établie devient un langage créatif et cela est commun à toute production esthétique significative.

2. La recherche de la beauté

Lorsqu'un mathématicien travaille sur un problème spécifique, il n'est certainement pas concerné, en premier lieu, par la quête de la beauté. La

première preuve d'un résultat non trivial est rarement belle et, en général, elle ne présente pas des éléments pourvus d'un *appeal* particulier.

Cependant, comme nous l'avons déjà dit en discutant des remarques de C.F. Gauss, il est évident qu'il y a une forme d'attitude compulsive par laquelle on recherche des nouvelles preuves ou, du moins, une meilleure compréhension du résultat lui-même. Pendant ce processus, on découvre des nouveaux éléments et, souvent, des nouveaux faits qui méritent le qualificatif de beaux. Les deux prochains exemples soutiennent cette thèse. Le premier est sans doute bien connu, mais il nous donne la possibilité de citer certaines opinions sur ces questions qui nous ont été délivrées par J.J. Kohn lors d'une conversation d'il y a quinze ans⁶.

Considérons, à ce sujet, le théorème fondamental de l'algèbre et soit un polynôme à coefficients complexes :

$$p(z) = z^n + \sum_0^{n-1} a_j z^j$$

et avec $n \geq 1$, alors il y a des nombres complexes, $z_1, \dots, z_n$ tels que:

$$p(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n).$$

Il s'ensuit immédiatement que le problème est équivalent à la recherche d'un $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $p(\alpha) = 0$; c'est-à-dire qu'il existe une racine du polynôme. Le problème est algébrique, mais sa résolution a besoin de sortir des limites de l'algèbre et cela, à certains égards, pourrait être considéré une première source d'insatisfaction : pour une quelque sorte de *cohérence interne* on voudrait qu'un problème algébrique soit résolu de manière algébrique.

Cela explique pourquoi la première preuve rigoureuse de C.F. Gauss était assez baroque et, il faut bien l'avouer, plutôt *laide* selon l'opinion du même C.F. Gauss.

La recherche d'une preuve plus belle a impliqué d'autres parties des mathématiques dans un approfondissement conceptuel concernant aussi bien ces mêmes autres champs mathématiques que le théorème lui-même qu'il fallait (re)-démontrer. Pour s'en faire une idée, considérons l'argu-

⁶ Nous avons remercié vivement J.J. Kohn, à l'époque, d'avoir bien voulu nous concéder le droit de citer cette conversation, mais aussi une lettre de sa part discutant de manière très fine certains caractères de la beauté dans les mathématiques. Précisons, pour les seuls non mathématiciens bien sûr, que J.J. Kohn professeur à Princeton a été unanimement reconnu comme l'un de plus grands spécialistes au monde de l'analyse complexe.

mentation suivante basée sur le théorème de Liouville affirmant qu'une fonction bornée et entière et holomorphe sur $\mathbb{C}$ est constante.

Le raisonnement est par contradiction. En premier lieu, nous observons que $|p(z)| \rightarrow +\infty$ avec $|z| \rightarrow +\infty$. En ce cas si $p(z)$ n'a pas de zéros, la fonction $1/p(z)$ est bien définie, bornée et holomorphe sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire entière. D'ailleurs, par le théorème de Liouville, il s'ensuit une contradiction pour $n \geq 1$. Citant une lettre de J.J. Kohn :

À partir du point de vue de quelqu'un qui est familier avec les concepts de base de l'analyse complexe la [...] preuve est vraiment belle parce qu'elle montre de manière immédiatement conséquente (*straightforward*) le chemin par lequel le résultat s'ensuit de choses que l'on connaît déjà. C'est ce que j'entendais indiquer lorsque j'ai dit que la preuve de Gauss était bellissima (en italien dans le texte). D'autre part, on peut aussi remarquer que pour établir ces mêmes concepts familiers dans l'analyse complexe on a parcouru un autre long chemin. Le théorème de Liouville s'ensuit de la formule intégrale de Cauchy pour les dérivées et cela dépend du théorème de Cauchy qui est assez raffiné.

Faisant un pas de plus on peut concevoir – à l'aide de la géométrie – une preuve plus simple du théorème de Liouville par le biais du Lemme de Schwarz, c'est-à-dire par un milieu géométrique comme il a été fait par L. Ahlfors. Il s'agit d'un point déterminant : l'emploi d'un nouveau point de vue augmente la connaissance et donne une nouvelle lumière à la question. Il est aussi intéressant – et cela se manifeste clairement dans le texte de J.J. Kohn que nous venons de citer – que la compréhension personnelle du problème est influencée par l'héritage culturel, par le *background* mathématique dont chaque mathématicien dispose et ainsi de suite.

Au seul but de montrer une simple manifestation de cette thèse, considérons la variation suivante de la preuve pythagoricienne de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Soit $p^2 = 2q^2$ avec p et q naturels. Lors de la factorisation en nombres premiers de p^2 et q^2 le même nombre premier doit apparaître aussi bien pair qu'impair. Il s'agit évidemment d'une contradiction. Peut-être que nous préférons cette démonstration par rapport à l'usuelle, mais elle dépend strictement du théorème de factorisation en nombres premiers qui fait tout naturellement partie du *background* habituel d'un mathématicien de notre époque. Ces considérations rapides nous permettent d'obtenir quelques nouveaux éléments pour mieux comprendre le sens de notre travail : en fait, et il s'agit là de notre nouvel élément, il ne s'agit pas de choisir une telle ou une telle autre procédure qui peut, ou non, guider notre quête d'une clarté mathématique, mais il est également évident qu'il y a quelque chose comme un goût qui joue un rôle de conditionnement par rapport à tout choix que nous pouvons effectuer. En ce

sens, le goût n'est pas seulement relié au choix d'une preuve ou d'une autre, mais est aussi enchevêtré à l'*a priori* structurel qui conditionne déjà la compréhension du problème à résoudre lui-même.

Le texte précédent de J.J. Kohn et les considérations que nous venons de développer, nous suggèrent l'introduction d'un nouvel élément analytique : une sorte de précompréhension du sens des mathématiques qui constitue l'horizon des développements qui peuvent ou non suivre. La structure en jeu doit être d'ailleurs prise au sens dynamique au sens où les différentes tensions jouent toutes au même temps. C'est-à-dire qu'il s'agit d'une sorte de structure *quasi-dialectique* (ou hyperdialectique, si l'on écoutait M. Merleau-Ponty⁷) dans laquelle toutefois *thèse* et *antithèse* ne confluent jamais – sous peine d'en supprimer le mouvement structurant – dans une synthèse finale : d'un côté nous avons cette précompréhension qui nous conduit dans la position du problème et dans la quête des bonnes résolutions suivant un certain chemin, de l'autre côté, le goût nous porte à considérer certaines démonstrations comme plus appropriées, plus conséquentes, plus concernées et ainsi de suite. Bref, des démonstrations qui sont, tout simplement, plus belles. Il s'ensuit clairement que tout acte mathématiquement créateur est l'expression, la concrétisation d'un style. De quoi s'agit-il ?

Une des réponses, poétique à l'apparence, mais capable de rendre possible plusieurs points de contact entre des expériences créatrices différentes a été donnée par M. Merleau-Ponty :

Le style est chez chaque peintre le système d'équivalences qu'il se constitue pour cette œuvre de manifestation, l'indice universel de la *déformation cohérente* laquelle il concentre le sens encore épars dans sa perception et le fait exister expressément.⁸

Il y a plusieurs éléments dans ce texte qui peuvent nous aider pour mettre mieux sous le feu de l'analyse notre problème. Le *style* dans les mathématiques se manifeste en filigrane à la constitution des objets de ces disciplines déjà pour ce qu'on pourrait nommer un choix opératoire. C'est-à-dire que le chemin pour créer et explorer est pavé par le style et que, plus précisément, la manière pour explorer les horizons des mathématiques qui conduit à l'existence des nouveaux objets est conséquente à un choix stylistique. En fait, ce chemin n'est pas fait au hasard. Il est une *déformation cohérente* qui nous permet de structurer, avec aussi un effet

⁷ M. Merleau-Ponty, *Le visible et l'invisible*, coll. TEL, Gallimard, Paris, 1984.

⁸ M. Merleau-Ponty, *Le langage indirect et les voix du silence*, in *Signes*, NRF Gallimard, Paris, 1985 ; p. 68.

en retour, le sens des mathématiques comme de toute autre science. De quoi dépend alors un choix mathématique ou un autre ?

Il dépend de plusieurs éléments de l'histoire idéale des mathématiques. Il dépend du goût, des projets en jeu, de la volonté du sujet concrètement pris à l'acte créatif impliqué par un projet mathématique. D'une manière plus technique, la notion a été approfondie par M. Richir⁹ qui, à ce sujet, introduit le concept de tautologie symbolique. Peut-être que la proposition apparaît plus lourde, mais elle permet d'éclairer certains points du choix que nous ferons dans une direction légèrement divergente. En fait, pour quelqu'un concerné habituellement par les mathématiques, parler de *tautologie symbolique* et non de *tautologie logique* est très significatif¹⁰. Qu'entendons-nous par là ?

Tout d'abord nous retrouvons une différence par rapport à ce qu'on affirme ou qu'on comprend à notre époque de la logique mathématique. Pour cette dernière, une tautologie logique est une formule vraie pour toute attribution de valeur de vérité aux symboles qui la composent. La notion opposée est bien sûr celle de contradiction : une formule fausse pour toute attribution de valeur de vérité à ses symboles. La notion de *tautologie symbolique* est, par rapport à ce qui précède, une forme d'articulation technique de la notion de *style* proposé par M. Merleau-Ponty. Elle nous permet d'éclairer trois points :

1. la *tautologie symbolique* n'est pas une *tautologie logique*. Cela au sens où elle est vraie, mais non au sens où elle est vraie pour toute attribution de valeur de vérité. Elle est vraie en raison du fait que la *déformation cohérente* la caractérisant est, *ipso facto*, constitutive et une sorte de *balisage* identifiant un parcours de sens possible.
2. Exactement pour les raisons qu'on vient d'exposer, chaque *tautologie symbolique*, éventuellement coordonnée avec des autres, contribue à la création d'un monde.
3. En quelque sorte, la notion *tautologie symbolique* permet de généraliser la notion de style. Cela au sens où le concept de style suggère un élément plus lié à la libre activité intellectuelle d'un sujet créateur, tandis que la notion de *tautologie symbolique* nous paraît plus apte à inclure aussi les caractères de *déformation cohérente* que l'on peut attribuer à une culture dans sa globalité.

Laissons pour plus tard quelques mots sur ce que signifie créer un monde et concentrons-nous sur ce que cette notion de *déformation co-*

⁹ En particulier nous nous référons à M. Richir, *L'expérience du penser. Phénoménologie, philosophie, mythologie*, J. Millon, Grenoble, 1996.

¹⁰ Il est clair que cela aussi est une explication en acte du sens précédemment exploré de la notion de *style*. Évidemment la notion de *tautologie symbolique* parle différemment à quelqu'un qui se mesure habituellement avec la logique mathématique.

hérente nous permet de comprendre, toujours par rapport à la logique : l'emploi d'un langage est toujours créatif et il obéit à des critères de *consistance* qui ne coïncident pas avec ceux de la logique mathématique. Ils sont plutôt des critères d'une logique de la création esthétique. Cela marque l'éloignement de toute interprétation logique *via* les prédicats vrai ou faux avec lesquels nous appliquons des labels aux constructions grammaticales du langage : toute activité symboliquement créatrice est *de facto* une déformation au sens strict. C'est-à-dire au sens où l'espace de création n'est pas nécessairement isotrope. Pour souligner ultérieurement la distance sidérale d'une interprétation pour ainsi dire algorithmique des mathématiques, nous affirmons que toute création symbolique – donc mathématique aussi – est une *déformation cohérente* qui se relie et établit des comparaisons avec d'autres *déformations cohérentes*. À ce sujet, il est intéressant de remarquer que nous pouvons confronter ces *déformations cohérentes* : par exemple, je regarde un produit artistique de la Renaissance et je suis capable de le distinguer d'un autre produit artistique, disons de l'époque baroque. Cela peut sembler une remarque triviale, car il est certain que les œuvres de Michel-Ange et de Raphaël se ressemblent, bien plus qu'elles ressemblent à celles de H. Matisse. Les compositions de J. Brahms et de R. Schumann se ressemblent plus entre elles qu'elles le font avec les créations de Guillaume de Machaut ou de A. Webern. C'est-à-dire qu'il y a quelque chose comme une famille de *déformations cohérentes* qui peuvent être regroupées par une sorte de communauté d'ententes, dans un ensemble d'évaluations conceptuelles qui dépendent toujours du caractère non isotrope de l'espace de la création. Essayons de poser les mêmes questions dans les milieux des mathématiques : peut-on affirmer, en ce sens, que les productions culturelles, les manières de penser, même les objets de recherche de A. Cauchy ressemblent à ceux de J.B.J. Fourier ? En revanche, peut-on soutenir qu'il y a une différence abyssale, pour ce qu'en est des caractères qu'on vient de mettre en évidence, entre des auteurs comme Euclide ou H. Lebesgue ?

Cela pose un problème ultérieur : il est, semble-t-il, légitime, comme nous venons de le faire, de mettre des mathématiciens en relation entre eux, mais pourquoi pouvons-nous le faire ? De manière encore plus générale, pourquoi pouvons-nous établir des relations entre des *créateurs symboliques* appartenant à des milieux différents ?

En fait, si nous retrouvons des éléments communs qui orientent la créativité des artistes ou des mathématiciens, il nous faut admettre une généralisation de la notion de *style*. Cela est dû à la possibilité d'utiliser la notion de *tautologie symbolique* introduite, en ce sens, au point 3 de l'énumération précédente. Autrement dit, nous pouvons confronter les différents *créateurs symboliques* parce qu'ils font parties d'une même

culture, d'une même *institution symbolique*¹¹ qui, par les *tautologies symboliques* qui l'axent à chaque moment, justifie certaines procédures créatives et aussi, plus généralement, de certaines manières de penser. Cela participe à la définition d'une époque, et rend possible la généralisation de cette communauté d'ententes à toute une discipline, à toute une institution symbolique. Participer à la caractérisation culturelle d'une époque veut dire agir à l'intérieur du champ conceptuel axé par les différentes *tautologies symboliques* qui articulent les possibilités évolutives de chaque *institution symbolique*. D'ailleurs, les différentes *tautologies symbolique* varient au long de l'histoire, elles ne sont pas fixées pour toujours et cela implique également que les *institutions symboliques* ne sont pas des blocs de marbre, elles tissent et retissent au cours du temps ce qui en fait partie et ce qui en exclu. Cela vaut aussi bien pour les éléments définis à l'intérieur de chaque *institution symbolique* aussi bien de manière explicite qu'implicite. Par exemple, de manière explicite, dans le milieu des mathématiques, on peut indiquer si un certain type de démonstration est adéquat ou non. Pour ce qui concerne les critères non explicites, nous le savons déjà : chaque époque mathématique a des critères pour définir la beauté, mais il est assez difficile de les indiquer. Quoi qu'il en soit, il est clair que les *tautologies symboliques* peuvent se modifier tout au long de l'histoire et qu'elles jouent une sorte de fonction de médiation entre l'individu – le mathématicien ou, plus généralement, le créateur symbolique – et la globalité de l'*institution symbolique*. À cette fonction, il nous faut ajouter que les mathématiques sont, suivant cette perspective, au croisement entre plusieurs *styles* individuels, entre plusieurs *déformations cohérentes* et cela aussi bien entre des *tautologies symboliques* et des *déformations cohérentes* plus pertinemment mathématiques que, plus généralement, des *tautologies symboliques* extérieures aux mathématiques proprement dites.

Dans la perspective des différentes *institutions symboliques*, nous pouvons bien saisir que chaque discipline créative – et non seulement *créative* – identifie une *institution symbolique* et les rapports entre les différentes cultures sont sans doute fluides, mais en même temps réciproquement structurants. C'est en vertu de cela que, pour ce qui fait l'objet de notre étude, la séparation des mathématiques du tronc de l'*expérience complète* d'un individu ou d'une époque est une abstraction. Certes, une abstraction nécessaire pour en isoler certains éléments structurels, mais dont il faut toujours conserver la trace sous peine de ne pouvoir pas don-

¹¹ Il s'agit de la locution utilisée en phénoménologie comme traduction de l'allemand *Stiftung*. Parfois le même mot est traduit par *instauration*. De toute façon, c'est la manière de traduire, dans le jargon phénoménologique, ce que jusqu'à maintenant nous avons appelé *culture*.

ner raisons de certains éléments impliquant une réflexion plus générale. Ces remarques permettent de fermer la boucle car, dans ces éléments au caractère plus général, il y a aussi l'établissement des critères capables d'encadrer la beauté dans les mathématiques. Autrement dit, l'un des éléments les plus importants pour essayer de comprendre certains points cruciaux de toute *institution symbolique* est une connaissance approfondie de l'histoire de la discipline qu'on est en train d'étudier. Et cela sous peine de rendre obscur aussi – entre autres choses, bien sûr – la compréhension des caractères esthétiques d'une discipline quelconque. À ce sujet l'une des expressions plus claires est due à J. Dewey qui, en écrivant de l'art – nous croyons que l'analyse des critères esthétiques est valable, en principe, pour toute discipline – fait remarquer que :

Lorsque les objets artistiques sont séparés des conditions de leur origine et de l'expérience, un mur est édifié autour d'eux qui les rend opaques dans leur signification générale avec laquelle se mesurent les théories esthétiques.¹²

Du point de vue programmatique, il est alors clair que pour analyser l'expression de la beauté dans les mathématiques, nous avons besoin de plusieurs éléments provenant aussi bien des mathématiques que de la philosophie. Cela au sens où le rôle capital doit être assumée par un croisement multiple entre études historiques, textes mathématiques et expérience mathématique de première main afin de construire une philosophie des mathématiques sensible à la réalité de ce qui se passe concrètement en elles.

À la suite de ce qu'on vient de fixer, le moment est venu d'indiquer une autre propriété dont disposent les *institutions symboliques*, cette fois considérées comme le *lieu symbolique* où s'expriment les différents créateurs symboliques. En effet, bien que chaque *institution symbolique* est une structure dont l'espace interne est non isotrope et où les axes créatifs sont assurés et tendus par les différentes *tautologies symboliques*, le point crucial est que ces *tautologies symboliques* sont coordonnées entre elles et donnent lieu à ce qu'on peut définir une *coordination harmonique*. Qu'il s'agisse d'une pluralité structurelle de *déformations cohérentes* valables, en principe, pour toute *institution symbolique*, ne change rien au fait que c'est au cœur de cette *coordination harmonique* que le créateur symbolique est appelé à agir. Et c'est bien ce nouveau terme – *harmonique* – qui doit retenir toute notre attention. L'utilisation du terme d'*harmonie* n'est pas si innocente : encore une fois nous empruntons un terme spécifique d'une autre activité créatrice – la musique – et l'employons pour mettre en évidence une sorte d'agran-

¹² J. Dewey, *Art as Experience*, Berkeley Publishing Group, New York, 1992 ; p. 3.

dissement du pouvoir créatif par rapport à la simple construction individuelle qui, par ce biais, pourrait être considérée comme le *développement mélodique*. Il est évident, pour rester à l'intérieur de cette métaphore expressive, que la *mélodie*, comme un théorème, fait déjà du sens en tant que *déformation cohérente*, car elle définit, déjà du point de vue intuitif, une unité pourvue d'un sens. Or, la question est que cette unité de sens sera lue à l'intérieur d'une *institution symbolique*. Autrement dit, cette unité peut être agrandie, rendue plus compréhensive par un emboîtement progressif de *déformations cohérentes*. Comme dans un jeu de *matrjoškas*.

C'est cette progression de déformation, cette amplification d'horizon que nous entendons indiquer comme sens primitif de l'utilisation que nous faisons de la notion d'*harmonie*. Nous venons d'écrire d'un *sens primitif*, car il faut saisir que, en quelque sorte, la compréhension harmonique ira se manifester de plusieurs manières en multipliant les renvois internes entre travail individuel du mathématicien, sens de ce travail à l'intérieur d'une théorie spécifique et rapport à la globalité des mathématiques elles-mêmes, entendues cette fois précisément comme *institution symbolique* des mathématiques. De cet enchevêtrement multiple, nous en avons des traces un peu partout dans la manifestation de la créativité mathématique. Or, cette coordination complexe se reproduisant sur plusieurs niveaux conceptuels a aussi une signification esthétique. Il suffit de ces mots de S. Mac Lane au sujet du concept de preuve pour saisir de manière vivante ce rapport entre les deux moments *harmonique* et *mélodique* :

Une preuve n'est pas seulement une suite de paliers individuels, mais un groupe de paliers toujours accordés à un plan ou à un projet définis [...] Nous affirmons par là que toute preuve mathématique a une idée directrice qui détermine tous les paliers individuels et qui peut être considérée comme le plan de la preuve.¹³

La quête de l'idée directrice conduit d'ailleurs S. Mac Lane à se poser des questions sur des problèmes de fondation. Et de là il s'ensuit, presque de manière automatique, l'idée qu'une fondation logique correcte devrait pouvoir être utilisée avec profit par la pratique mathématique. Ces considérations simples risquent cependant de nous faire ignorer – et peut-être d'encourager – deux incompréhensions dangereuses par rapport aux deux termes que nous venons d'introduire :

¹³ S. Mac Lane, *Abgekürzte Beweise in logik Kalkul* (thèse de Doctorat), Georg August Universität zu Berlin, Göttingen, 1934. Publié en anglais in [I. Kaplanski éd.] *Saunders Mac Lane Selected Papers*, Springer Verlag, New York, 1979 ; pp. 60-61.

1. Le problème de la fondation logique d'une partie des mathématiques ou des mathématiques en leur globalité.
2. Le problème de comprendre ce qu'il faut entendre sous le titre de pratique mathématique.

Nous commençons par le deuxième problème, car il est plus aisé à déterminer. Après tout, il n'y a qu'une manière pour caractériser proprement l'activité d'un sujet dans son champ de recherche et cela est la clé de compréhension de la notion de pratique. C'est-à-dire que par pratique mathématique nous entendons l'activité concrète d'un mathématicien dans son champ spécifique de recherche. On est donc très loin de toute idée d'une application pratique des mathématiques. Nous sommes dans une situation tout à fait comparable à celle où nous retrouvons le peintre ou le musicien lorsqu'ils sont aux prises à la tentative de résoudre un problème spécifique de leur art. Dans une pratique créatrice, donc aussi dans une pratique mathématique, le sens des opérations créatrices accomplies ne quitte jamais le milieu de la discipline et demeure toujours, pour ainsi dire, une affaire interne.

En revanche, le problème qui apparaît lorsqu'on s'interroge sur un nouveau projet de fondation pour les mathématiques est énormément plus délicat. Ce serait une grosse erreur de considérer cette phrase en contradiction avec nos affirmations précédentes au sujet de la logique mathématique. L'erreur est due, à notre avis, à la superposition entre deux significations du même terme qui doivent être gardées bien distinctes : le terme en question est *consistance*. Comme il est bien connu, la *consistance* est une propriété nécessaire pour construire un système au sens logico-mathématique. Elle caractérise l'impossibilité de dériver des contradictions à partir de l'ensemble des axiomes et des règles d'inférence admises. C'est-à-dire qu'il y a la nécessité de la non inconsistency pour les systèmes logiques répertoriés par la tradition, mais cela ne touche pas une autre signification du mot *consistance*, une signification beaucoup plus importante, du moins selon notre point de vue. En relation à notre point de vue, la *consistance* est en fait une propriété de la *déformation structurelle* – souvenons-nous des mots que M. Merleau-Ponty attribue à la *déformation cohérente* – qui doit caractériser toute activité créatrice. Selon notre interprétation cette notion de *consistance* ne signifie rien d'autre que la constatation qu'un acte créateur – en tant qu'acte linguistique – est *ipso facto* un acte faisant du sens. Un acte créatif n'est pas du babillage, mais une opération *consistante* qui édifie une unité ouverte pourvue d'une signification qui est immédiatement mélodique, comme nous l'avons introduit précédemment. À notre avis, il y a eu une superposition entre ces deux sens du mot *consistance*. Cela n'empêche pas que nous ne proposons aucunement le remplacement de la notion logico-mathématique de *consistance*, nous proposons tout au plus de

l'intégrer à un plan plus ample de compréhension. Comment le faire ? Dans quelle direction ?

Pour le moment nous pouvons nous contenter d'une observation assez triviale : dans une nouvelle théorie de fondation des mathématiques, il y a une *déformation cohérente* de grande échelle comportant une structuration harmonique d'ordre supérieur par rapport à ce que nous avons étudié jusqu'à présent. Rien de plus, mais aussi et de toute évidence, rien de moins. Or cela concerne, comme dans toute le reste des sciences de l'esprit, un grand et profond renouvellement historique. La *consistance* aussi est une fonction qui doit être comprise dans une multiplicité de possibilités significatives, de chemins conceptuels caractérisant une ou plusieurs époques, d'entrecroisements de goûts et, pour finir, une idée de *consistance* qui concerne de près une évaluation esthétique.

Cela, pour rester à notre utilisation des termes empruntés à la musique, nous permet d'approfondir les richesses de ce que nous entendons par *harmonisation*. Par ce biais, nous pouvons observer un premier effet en retour. Cet effet consiste dans l'utilisation d'une propriété revenant à certaines *déformations cohérentes* au moment où on se rend compte qu'elles peuvent être intégrées de plusieurs manières – introduisant un nouveau sens de *déformation cohérente* – à la structure immédiatement supérieure, tout comme une petite *matrjoška* peut rentrer dans celle qui est juste un petit peu plus grande. Pour le comprendre pleinement revenons aux travaux de S. Mac Lane immédiatement postérieurs à ce que nous avons cité précédemment du même auteur.

Venons-en donc à l'un de pivots de l'algèbre abstraite, la notion d'anneau et considérons une seule application très connue pratiquée sur ces structures : le fait qu'en $\mathbb{Z}$, l'anneau des nombres entiers, a et b sont dit être congrus modulo 7, par exemple, et nous écrivons $a \equiv_7 b$, si $a - b$ est divisible par 7.

Une possibilité pour définir le groupe quotient $\mathbb{Z}_7$ des nombres entiers modulo 7 est de considérer la relation d'équivalence $\equiv_7$ et définir $\mathbb{Z}_7$ comme l'ensemble de classes d'équivalences distinctes. L'ensemble $\bar{a}$ dénote alors la classe contenant a . En $\mathbb{Z}_7$ il y a exactement sept éléments $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{6}$. Les opérations sont bien définies en utilisant celles représentatives ; par exemple $\bar{1} + \bar{4} = \bar{8} = \bar{3}$. Il faut remarquer que le signe $+$ qui apparaît à gauche dans la nouvelle opération en $\mathbb{Z}_7$, tandis que le signe $-$ en $\bar{8} = \bar{3}$ est l'opération $-$ en $\mathbb{Z}$ de manière telle que $\bar{8} = \bar{3}$ est la classe $\bar{5}$. Les éléments de $\mathbb{Z}_7$ sont des sous-ensembles de $\mathbb{Z}$. Une autre manière de définir $\mathbb{Z}_7$ est d'affirmer que ses éléments sont les nombres entiers habituels, mais qu'avec $\equiv_7$ nous indiquons un nouveau type d'égalité. Dans ce cas aussi $\mathbb{Z}_7$ a exactement sept éléments distincts. En accord avec S. Mac Lane :

Un groupe quotient G/N (N normal en G) peut être décrit ou bien comme un groupe dont les éléments sont des co-ensembles de N in G , ou bien comme un groupe où les éléments sont les éléments de G et l'égalité est la congruence modulo N . [...] Nous suivrons ce deuxième point de vue, et regarderons un groupe G comme un système d'éléments pourvu d'une égalité réflexive, symétrique et transitive telle que logiquement les éléments identiques sont égaux (mais non nécessairement la réciproque) et telle que les produits d'éléments égaux soit égal.¹⁴

Les exemples pourraient se multiplier, mais l'élément capital reste le même : une compréhension nouvelle d'une unité – d'une *déformation cohérente* – et son insertion harmonique dans le même tissu conduit à un agrandissement des connaissances et propose à nouveau une *déformation cohérente* d'ordre supérieur. Exactement comme dans le jeu des *matrjoškas* que nous avons évoqué. En ce sens, réfléchir à la pratique mathématique consiste à comprendre l'activité d'un mathématicien lorsqu'il considère la théorie de l'intégration selon Lebesgue et ne fait pas de distinctions entre des fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle. En ce sens le problème n'est pas des moindres quant à l'extension de choses qu'il touche : il suffit de se souvenir que, par exemple, un ensemble de mesure nulle peut avoir un nombre infini de points. Tous les ensembles de cardinalité $\aleph_0$ sont en effet de mesure nulle dans $\mathbb{R}$.

Ces réflexions suggérées par les analyses de S. Mac Lane rencontrent la difficulté de l'extrême concision de cet auteur. Nous croyons cependant que ces suggestions nous sont nécessaires pour mener à bien notre effort. Il nous faut donc les intégrer par des nouveaux concepts et telle est la tâche de la prochaine section.

La beauté que le mathématicien rencontre dans son travail

Comme l'a écrit G.-C. Rota dans la première section de son article Phénoménologie de la beauté mathématique :

Tandis que les peintres et les musiciens sont probablement embarrassés par les références à la beauté de leur travail, les mathématiciens aiment les discussions à propos de la beauté des mathématiques. [...] Les artistes professionnels soulignent plutôt les aspects techniques que les aspects esthétiques de ce qu'ils font. Les mathématiciens, au contraire, sont pris par la passion de porter des jugements sur la beauté de leurs champs mathématiques favoris.¹⁵

¹⁴ S. Mac Lane, Groups, Categories and Duality, in *Proceedings of the National Academy of Sciences*, n. 34, 1948, pp. 263-267. La citation est aux pp. 265-267. Il faut remarquer que pour la suggestion de cette idée, S. Mac Lane cite O. Haupt, *Einführung in die Algebra*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 2 voll. ; 1929 en soulignant qu'il s'agit d'un texte injustement oublié.

¹⁵ G.-C. Rota, Phénoménologie de la beauté mathématique, in *Phénoménologie discrète. Écrits sur les mathématiques, la science et le langage*, op. cit. ; p. 77.

Nous pouvons poursuivre en établissant quelques analogies, comme le fait par exemple, M. Atiyah¹⁶ dans un travail récent. La première distinction à faire concerne la distinction entre un moment global et un moment local. Le premier, au sens large, concerne le développement d'une théorie, le deuxième par un thème plus limité, peut-être un détail. Cela propose à nouveau ce que nous avons introduit précédemment au sujet d'une attitude *harmonique* et d'une *mélodique*¹⁷. Le problème est difficile et, au seul but d'en éclairer les contours, nous pouvons penser au déroulement d'une symphonie classique. Dans une symphonie, nous disposons d'une pluralité de lignes mélodiques – au fond, tout comme dans une théorie mathématique ou dans un résultat assez complexe – qui sont structurées dans l'unité de chaque mouvement, mais la progression significative de tout cela ne s'arrête pas pour autant : une symphonie n'est réussie que lorsque les mouvements eux-mêmes s'enchevêtrent dans une structure unitaire, se composent dans une *déformation cohérente consistante*. Pour nous éclairer, à ce niveau analytique, nous nous situons à la lisière entre les lignes mélodiques donnant l'ourdi du mouvement et le même mouvement entendu dans sa globalité, comme pourvu d'un sens. Et à ce point on n'a pas encore terminé, car il faut encore développer le travail interprétatif nécessaire pour passer de l'unité d'un mouvement à l'unité de la symphonie elle-même. Tout en restant à la métaphore choisie par M. Atiyah, on peut comprendre que la théorie peut être admirée par exemple en raison de son importance, développement et applications ; bref en la regardant comme une structure architectonique. Les aspects locaux révèlent leur intérêt par exemple dans une démonstration courte d'un théorème, comme peut l'être la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ ou de π .

Toujours à un niveau encore assez métaphorique, il est clair que la création d'une théorie fait plus penser à l'activité d'un architecte, tandis que les *belles preuves* – où l'on admire la beauté de certains détails – révèlent plutôt la maîtrise d'un artisan.

Une belle cathédrale a aussi bien une structure qui nous saisit que des détails délicats. Une grande théorie mathématique devrait être belle autant à grande qu'à petite échelle.¹⁸

L'idée ainsi introduite est stimulante et, de fait, elle s'arrange bien avec ce que nous avons observé jusqu'ici dans les mathématiques, mais il nous

¹⁶ M. Atiyah, Mathematics : Art and Science, in *Bulletin of AMS*, n. 43, 2005 ; p. 87-88.

¹⁷ Les deux milieux sont fondamentalement identiques. La différence, s'il y en a une, est de nature dynamique. Le rapport local-global est plus d'ordre statique, tandis que le rapport harmonique-mélodique est d'ordre intuitivement plus dynamique étant lié à la temporalité comme milieu conceptuel où ce rapport se déroule effectivement.

¹⁸ *Ibidem*, p. 87.

faut être capables d'agrandir les limites de la métaphore et de la compléter. En fait, les deux termes-limites qui ont été proposés – l'architecte avec son projet d'une cathédrale et, de l'autre côté, l'artisan responsable des petits détails – convergent vers une forme commune.

Notre thèse est donc que l'architecte et l'artisan sont deux représentations-limites : les deux points extrêmes des deux horizons créateurs qui sont séparés de manière plus facile d'un point de vue théorique que pratique. Après tout, l'unité des mathématiques est essentielle pour leur compréhension.

Si l'on réfléchit un instant aux exemples précédents, il nous semble évident que la question d'une nouvelle fondation des mathématiques concerne de plus près l'architecte que l'artisan. Peut-être que dans cette direction on pourrait plus proprement parler d'une architecture majeure ou d'un nouveau plan urbanistique. Or, le fait le plus surprenant est que cela n'est pas si direct qu'il apparaît à première vue. En effet, la proposition d'un nouveau quartier dans la ville des mathématiques ou le fait de penser à nouveau toute la ville selon un nouveau plan régulateur naissent souvent à partir de problèmes qui ne semblent concerner, à première vue, que des détails.

Cela est une preuve évidente de la vie intrinsèque des mathématiques et de la nature extraordinairement complexe qu'elle manifeste. C'est-à-dire que l'un des éléments constitutifs de sa tenue architectonique est dans cette sorte de structuration cachée de ses renvois internes. D'autre part, l'un des éléments les plus caractéristiques qu'on peut découvrir dans ce rapport entre architecte et artisan est dans la possibilité, pour ces deux rôles, de produire des créations qui ont l'étrange capacité d'avoir des effets inattendus. Évidemment chacun de ces résultats diminue son effet (et son importance aussi) de plus en plus qu'on s'éloigne de son champ typique d'application, de son milieu, mais cet effet ne descend jamais à zéro et parfois, nous le verrons d'ici peu, il va établir des liaisons complètement inattendues dans des milieux à l'apparence très distants. Nous avons donc deux résultats importants : tout d'abord l'unité cachée des mathématiques constitue, en tant que points limites, les deux pôles individués – l'architecte et l'artisan – tout en les justifiant, mais surtout en justifiant leurs actions qui sont, *ipso facto*, enregistrées dans un projet commun. Ensuite, pour l'autre résultat lié plutôt à notre remarque sur les *rapprochements inattendus*, nous avons une remarque successive de M. Atiyah nous pousse encore vers un approfondissement ultérieur :

Les plus grandes surprises, [...], sont les liaisons inattendues entre des milieux mathématiques qui étaient apparemment fort éloignés.¹⁹

¹⁹ *Ibidem*, p. 88.

Il nous faut nous arrêter un moment à ces remarques, car elles sont partagées par plusieurs mathématiciens et il faut chercher d'expliquer cette attitude, car elle semble bien identifier un critère de beauté déterminant pour les mathématiciens. C'est pour cette raison que nous pouvons comprendre l'articulation des mathématiques au thème de la beauté qui est, en ce sens, toujours à l'arrière-plan. À ce sujet, considérons quelques exemples dont le premier est bien connu et a été suggéré par I. Lakatos.

Considérons cinq points différents dans le plan – disons A, B, C, D, E – représentant cinq pays différents et allons en relier deux entre eux par un segment lorsque les pays en question ont une frontière commune. Par exemple, considérons les segments AB, BC, CD, DA et soit le point E l'unique en dehors (pour fixer les idées) du quadrilatère $ABCD$. Si, par exemple, nous relions E avec A , nous obtenons $s = 5$ sommets, $a = 5$ arêtes, et $f = 2$ faces, à savoir ce qui est intérieur à $ABCD$ et ce qui y est extérieur. Calculons maintenant $v - a + f = 2$. Nous pouvons maintenant ajouter ou soustraire des sommets ou des arêtes afin de représenter une nouvelle carte géopolitique. En faisant après le calcul qu'on vient de présenter, on obtiendra le même résultat. En répétant l'expérimentation un certain nombre de fois, nous intuitionnons – bien sûr par la constance du résultat – qu'on est en train de découvrir une nouvelle propriété mathématique. En fait, la validité générale de la formule précédente a été démontrée par L. Euler. Le point crucial est que les mathématiciens ne s'arrêtent pas là. Cette obtention d'une certaine forme de généralisation n'est pas encore suffisante et, de toute façon, elle pousse vers autre chose. Que se passe-t-il lorsque nous remplaçons une feuille de papier par une surface courbée, par exemple une sphère ou par un tore ?

De fait, des nouvelles recherches sont parties des constatations qu'on vient d'énumérer et l'un des résultats de ces efforts a été le théorème de Gauss-Bonnet affirmant que l'intégrale de la courbure de Gauss sur une surface fermée est égale à 2π fois la caractéristique d'Euler-Poincaré. De surcroît, la liaison qui s'établit immédiatement entre la quantité analytique donnée par l'intégrale de la courbure gaussienne et la topologie est surprenante. Cela engendre un type de jouissance esthétique assez particulier. Un plaisir esthétique se réalisant pendant certains moments d'unification de la construction des mathématiques. Comme l'écrit J.M. Borwein :

La sensibilité esthétique (*aesthetic buzz*) ne dérive pas, tout simplement de la contemplation d'une belle partie des mathématiques, mais aussi d'une intuition couronnée par le succès.²⁰

²⁰ J.M. Borwein, *Aesthetic for working Mathematician* in [N. Sinclair, D. Pimm, W. Higginson] *Mathematics and Aesthetic. New Approaches to an Ancient Affinity*, CMS Books in mathematics, vol. 25 ; *op. cit.* ; p. 25.

Cette remarque s'applique aussi bien à l'exemple précédent qu'au prochain que nous allons construire sur le thème de la complétude stochastique dans les variétés riemanniennes. La complétude stochastique est la propriété des processus stochastiques qui ont un temps (*lifetime*) de vie infinie. Pour le mouvement brownien sur une variété riemannienne, cela signifie que la probabilité totale pour une particule d'être trouvée dans l'espace d'état est constamment égale à 1. Considérons maintenant u – une fonction de classe C^2 sur M . Si u a un maximum en $p \in M$, alors $\Delta u(p) \leq 0$ et $|\nabla u|(p) = 0$. Cette propriété peut être étendue au principe suivant, connu en littérature comme le principe de maximum de Omori-Yau. Si $u \in C^2(M)$ et $u^* = \sup_M u < +\infty$ alors il y a une séquence $\{x_k\} \subset M$, avec $k \in \mathbb{N}$, telle que $\forall k$:

$$u(x_k) > u^* - \frac{1}{k} \quad |\nabla u|(x_k) < \frac{1}{k} \quad \Delta u(x_k) < \frac{1}{k}.$$

Si nous nous libérons de la requête sur $|\nabla u|$, nous obtenons le principe de maximum faible. Afin de rendre valides les deux principes, nous devons fixer des contraintes supplémentaires.

Le fait surprenant est que la validité du principe faible de maximum sur M est équivalente à la propriété de la complétude stochastique pour le mouvement brownien.

Le pont qu'on établit entre la probabilité et un concept extrêmement riche d'utilisations de provenance analytique est inattendu et amène un grand nombre de conséquences. Pour ce qui en est de notre réflexion sur la beauté et aussi sur l'intérêt esthétique, il est clair que le résultat en question semble assez aisément confirmer les thèses énoncées par M. Atiyah (et autres) au sujet du caractère surprenant et presque *choquant* qu'un beau résultat peut avoir.

Pour approfondir nos analyses, considérons une autre suggestion qui nous provient du même travail de J.M. Borwein que nous avons déjà cité :

L'intérêt esthétique dérive, la plupart des fois, d'une certaine caractéristique : c'est-à-dire que cet intérêt s'origine de la capacité de raisonner au sujet d'un nombre inconnu d'objets par l'identification d'un point de vue restreint qui capture toutes les possibilités. Cela est un procédé qui n'est pas si différent de la méthode puissante de preuve connue sous le nom d'induction mathématique.²¹

En ce cas, le critère esthétique fonctionne de manière un peu différente par rapport aux résultats précédents. L'intérêt, à présent, est dans cette capacité dont dispose une création mathématique de réduire, de

²¹ *Ibidem*, p. 37.

regrouper dans une situation unitaire quelque chose qui semblait déga-
ger une sorte de pluralité, d'*embrouillamini*, de possibilités quelque peu
décousues. Comme exemple de cela, considérons la dernière preuve due
à L.M. Kelly²² d'un résultat originairement conjecturé par J.J. Sylvester et
prouvé pour la première fois par T. Grünwald :

Soient $n \geq 3$ points non colinéaires sur un plan, alors il existe une ligne
droite qui contient exactement deux de ceux-ci.

Pour le montrer, commençons par l'établissement de nouveaux ob-
jets constitués de la manière suivante : construisons toutes les *droites*
qui relient deux points de cet ensemble et considérons les couples
constitués par une droite de ce type et un point de l'ensemble en dehors
d'elle. Puisque les points sont en nombre fini, il y aura une droite de
connexion avec son point externe qui présente la condition de distance
plus petite de ce point extérieur²³. Pour fixer les idées, nommons les
éléments de cette droite particulière : utilisons Q et S pour indiquer
les deux points de la droite de connexion r et P pour indiquer le point
extérieur à r . Si par rapport à la condition présentée par le théorème, la
droite de connexion ne contient que ces deux points, la démonstration
est *ipso facto* terminée par l'obtention de la droite cherchée. La diffi-
culté est de démontrer que, pour cette droite r , il n'y a pas des points
ultérieurs qui en font partie. La démonstration procède par l'absurde
et donc imaginons qu'un point T , étant sur la droite r , ne respecte pas
cette condition et essayons de montrer que cela conduit à une contra-
diction. Pour ce faire, établissons que S soit entre H et T . Définissons
le point H indiquant l'intersection du segment perpendiculaire partant
de P avec la droite r et, enfin, définissons les droites de connexion q et
 t passant par P et opposant Q et T . Maintenant nous avons tout ce qu'il
faut : en fait si S est entre H et T , alors est plus proche de q que P de
 R . D'autre part, si S est entre Q et H , alors S est plus proche de t que
 P de r . Dans les deux cas, cela est en contradiction avec les conditions
établies pour définir r , Q , S et P .

²² Ce résultat avait été conjecturé par J.J. Sylvester en 1893. Dans l'usage actuel, il est
résolu par le théorème de Sylvester-Gallai. Il y en a eues plusieurs démonstrations dont
la principale est due à L.M. Kelly. On peut se référer à L.M. Kelly, W.O.J. Moser, On the
number of ordinary lines determined by n points in *Canadian Journal of Mathematics*,
n° 10, 1958 ; p. 210 – 219. Cf. aussi le problème 4065 posé par P. Erdős et résolu par
S. Steinberg in Three point collinearity (solution to problem 4065), in *American Math-
ematical Monthly*, n° 51, 1944 ; p. 169 – 171. Dans cet article on compare aussi à d'autres
résolutions et on cite les noms de R.C. Buck, T. Grünwald, N.E. Steenrod et, bien sûr,
de L.M. Kelly.

²³ S'il y a quelques points ayant la même distance de la droite, cela ne change rien à notre
démonstration. En ce cas, il suffit de choisir une seule de ces droites.

Seulement pour donner un autre exemple dans la même direction, considérons une configuration de points avec $n_{(p)} \geq 6$ et toutes les *droites de connexion* qui les relient. Maintenant, colorons quelques unes de ces droites en rouge. Il n'y a pas de doute que, par cette opération, on aura toujours du moins un triangle avec tous les côtés rouges ou un triangle avec tous les côtés noirs (avec le ou au sens logique habituel $\vee$). Pour le montrer, il suffit de dessiner les six points, disons A, B, C, D, E, F et considérons tous les segments partant de A et les reliant aux autres cinq points. Du moins trois de ces segments ont la même couleur : fixons que AB, AC et AF sont rouges. Poursuivons : en ce cas, si BC est rouge, on a terminé, car il y a déjà un triangle rouge. Si ce n'est pas le cas, considérons CF : s'il est rouge on a ce qu'on cherchait, s'il n'en pas le cas, le triangle BCF résout le problème par l'autre éventualité. En fait il est noir. Il faut remarquer que par $n_{(p)} \leq 5$ le théorème serait faux.

Théories

Jusqu'à présent nous avons considéré quelques exemples de beaux théorèmes ou de belles démonstrations dans la résolution de certains problèmes. Comme l'avait indiqué M. Atiyah, nous avons discuté du travail de l'artisan. Le moment est venu de faire quelques considérations – pour rester dans la même métaphore – sur le travail de l'architecte ou, encore, d'analyser de plus près ce que le mathématicien fait lorsqu'il crée de nouvelles théories, mais surtout lorsqu'il les considère ou les évalue aussi du point de vue esthétique. Par un souci ultérieur de précision terminologique, il nous faut spécifier la différence entre deux notions souvent superposées : théorie et structure. En fait, si une théorie est assez aisément encadrée et saisie, souvent la notion de structure se confond avec elle, car, surtout si l'on est conditionné par l'esprit de Bourbaki, une théorie est considérée comme toujours relative à une certaine structure. Mais il n'en est pas toujours le cas ; par exemple, lorsque nous discutons de théorie des nombres. Dans ce champ il est vraiment très difficile d'y trouver une structure et le même vaut, *mutatis mutandis*, pour la théorie des équations différentielles et ainsi de suite.

C'est-à-dire qu'on peut repérer assez aisément quelque chose comme une théorie ou, du moins, une amorce de théorie, mais il est beaucoup moins facile de détecter les éléments qui sont spécifiques des structures au sens bourbachique.

Dans ce qui suit, nous ne travaillerons pas avec les structures et, pour ainsi dire, nous nous contenterons des théories, car leur utilisation pour nos buts est déjà assez difficile.

Avant tout, d'une manière peut-être encore tout à fait intuitive, la communauté des mathématiciens considère une théorie comme un noyau solide de connaissances construit autour d'autres noyaux solides qui convergent en elle. Pensons, par exemple, à la théorie de l'intégration selon Lebesgue, à la théorie des groupes ou à la théorie des distributions pour n'en citer que trois. Pour donner un bon point de départ à toute analyse successive, nous pensons que le mathématicien à l'égard d'une théorie considère ce qui suit comme des éléments du moins souhaitables qu'une théorie devrait présenter :

1. Elle doit présenter une connaissance organisée.
2. Elle doit présenter une économie de pensée dans son exposition.
3. Les relations avec d'autres champs mathématiques doivent être bien éclaircies et explorées et cela doit, de toute manière, caractériser les théories. Autrement dit, une théorie prometteuse attire, déjà par ce caractère, l'intérêt des mathématiciens.
4. Elle devrait être riche en problèmes raisonnables et vivre dans la communauté des mathématiciens pour un temps assez long. Pendant ce temps, elle devrait résoudre les difficultés qui se présentent à son intérieur dans le cours de son développement.

Le dernier point est sans doute le plus important étant intimement connecté à la vie elle-même de la théorie et il caractérise ce que les mathématiciens apprécient dans les bonnes théories. Par exemple, considérons la théorie des applications méromorphes actuellement nommée de Nevanlinna-Ahlfors-Cartan. Dans un temps assez récent elle est revenue à l'attention de la communauté des mathématiciens après une certaine période de silence, par les travaux de H. Weyl, H.H. Wu et P. Griffiths et collaborateurs et par son application, couronnée par un succès lumineux, à l'étude des équidistributions de l'application de Gauss d'une surface minimale dans l'espace euclidien. En fait, après les efforts de plusieurs mathématiciens – parmi lesquels signalons S.S. Chern, R. Ossermann, F. Xavier et plusieurs d'autres – cette théorie a permis en 1993 à H. Fujimoto de prouver la belle généralisation du théorème de Picard : une surface minimale complète in $\mathbb{R}^3$ dont l'application gaussienne néglige au moins cinq points de la sphère est un plan. C'est à partir de ce moment que les chercheurs continuent activement les recherches en découvrant de nouveaux buts qui s'ensuivent presque naturellement de la théorie elle-même et cela est un élément capital d'une belle théorie mathématique. Pour mieux nous expliquer, il faut saisir le rôle que nous venons d'attribuer à l'architecte dans cette théorie : il prévoit et oriente le futur de la discipline. Le rôle de l'architecte consiste donc dans l'acte de prolonger les observations riches en développements possibles de R. Nevanlinna sur la généralisation du théorème de Picard et, par ce biais, il produit une belle construction présentant plusieurs ramifications et intersections avec plusieurs autres domaines des mathématiques.

Dans une direction presque opposée, il y a aussi d'autres cas qui montrent qu'une théorie, autrefois évaluée comme belle tout au long d'une certaine époque, peut, par après, disparaître presque complètement. Tel est le cas, par exemple, de plusieurs branches de la géométrie classique. L'unique remarque pertinente qu'on peut avancer à ce sujet concerne la constatation que les paradigmes déterminant le consensus ou l'appréciation d'une théorie changent au fur et à mesure que les pôles d'intérêt se modifient. Cela nous montre que le rôle joué par l'*institution symbolique* est toujours déterminant. Il suffit d'une petite modification d'une *tautologie symbolique* – où des équivalences stylistiques – pour impliquer des effets de ce type. Il se peut qu'une théorie soit, à une certaine époque, très intéressante pour une éventuelle application à un problème technologique et qu'elle aille lentement disparaître en raison de l'apparition d'une nouvelle théorie plus appropriée. Il y aussi des théories qui ont eu un grand succès en raison de leur intérêt philosophique impliquant, semblait-il, des profondes révolutions conceptuelles. Tel est le cas, par exemple, de la théorie des nombres transfinis de G. Cantor désormais pratiquement oubliée par la communauté des mathématiciens (mais non par les logiciens et les philosophes). Comme D. Hilbert l'a affirmé, une théorie est intéressante et importante pour autant qu'elle reste vivante. Peut-être qu'on peut appliquer la même remarque en ce qui concerne sa beauté.

Comme observation générale, la présentation d'une théorie satisfait le goût esthétique des mathématiciens qui préfèrent des démonstrations *sobres*, des argumentations bien balancées, des raisonnements symétriques et ainsi de suite. De manière un peu plus imagée on peut dire que le goût d'architecte du mathématicien tend à privilégier des structures qui font penser à la beauté classique bien représentée par un temple dorique. Sans approfondir la question, il nous faut remarquer le caractère presque opposé manifesté par le processus qui caractérise une belle démonstration : celle-ci est souvent particulièrement appréciée si elle montre un effet de surprise, un déséquilibre dynamique et une certaine dissymétrie qui donnent, pour ainsi dire, ce caractère piquant si intéressant pour les mathématiciens.

Remarques conclusives

Les discussions et les exemples donnés jusqu'à présent nous montrent clairement que les mathématiques ne sont pas un objet statique et que les critères pour définir la beauté de ses constructions se modifient et basculent en relation aux différentes périodes de leur histoire. Un bon exemple de ce changement historique peut être vu en analysant les for-

tunes de la formule d'Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ qui a été historiquement considérée la plus belle formule des mathématiques et qui est restée pour plusieurs mathématiciens et physiciens l'une des favorites (R. Feynman). Mais d'autres mathématiciens de notre époque la considèrent même trop triviale et, dans une certaine mesure, dépourvue d'un sens esthétique. Certainement, pour son appréciation – une appréciation quelque peu “primitive” pour quelques points de vue – il faut considérer que l'identité presque magique $e^{i\pi} + 1 = 0$ implique trois piliers de l'histoire des mathématiques, il s'agit évidemment de e , i et π .

Le fait de trouver une formule qui, d'une manière très simple, les implique tous semble être une sorte de consécration d'un travail bien accompli, terminé. Atteindre un palier important où certains casse-têtes, pour une fois, sont rendus productifs et fonctionnels les uns pour les autres, donne effectivement une forme de satisfaction. Et cela montre aussi bien du déséquilibre dynamique que du piquant. Certes, pour un goût postérieur où aussi bien l'analyse complexe que la transcendance de e et de π n'ont plus rien de mystérieux, cette formule peut paraître un peu naïve, voire un peu terne. C'est en ce sens que, pour plusieurs mathématiciens, la beauté mathématique montre des caractères fort subjectifs – sans que par là on doive interpréter ces caractères comme psychologiques – corrélés à certains champs d'intérêt, aux moyens techniques préférés, à l'expérience passée et ainsi de suite. Ces observations, nous semble-t-il, devraient rendre aisément compréhensible la difficulté de donner un critère stable afin de fixer la nature de la beauté mathématique contrairement à l'idée et, probablement, aux auspices de G. Hardy. D'ailleurs, et au fond il s'agit de la thèse complémentaire à celle que nous venons de refuser, nous n'acceptons également pas l'idée que la beauté mathématique consiste dans une beauté formelle statique. En fait, et cela condense aussi toutes nos observations précédentes, nous pensons qu'il y a un élément précieux de la beauté pour la sensibilité du mathématicien au travail : il apprécie, et nous à sa suite, la beauté mathématique des processus, des idées et des méthodes que nous employons en faisant concrètement des mathématiques à l'heure actuelle.

En ce sens, précisément en vertu de ce que nous avons soutenu jusqu'à présent, nous pouvons tirer quelques-uns des éléments essentiels qu'un théorème, une démonstration ou même qu'une théorie mathématique doivent posséder. Pour y arriver, il nous faut revenir à une idée que précédemment nous avons employée comme métaphore et qui impliquait une considération à l'apparence quelque peu banale : l'idée de la beauté qu'un mathématicien manifeste généralement est d'ordre assez classique. Les termes par lesquels nous avons caractérisé cette attitude, même si de manière inconsciente, sont toujours les mêmes : élégance, propreté, symétrie et, avant tout, la capacité de mettre en relation plusieurs champs

des mathématiques. C'est pour cela que nous avons introduit l'image, jouant le rôle d'une métaphore, du temple dorique pour caractériser la nature de la beauté des mathématiques recherchée par le mathématicien. La beauté austère d'un temple dorique rend tout à fait évidents ces caractères déjà soulignés d'un goût et d'une proportion interne. À savoir, mesure et pureté de lignes. Précisément comme dans un temple dorique. Par ailleurs, la question surgit immédiatement : d'où vient un goût de ce type ? Pourquoi, aussi dans les différentes manières de comprendre ce même progrès, le mathématicien reste assez lié – en considérant sa discipline – à ces canons de beauté en quelque sorte ultra-classiques qui gouvernent le sentiment esthétique de la communauté des mathématiciens et qui n'ont pratiquement subi aucune modification fondamentale ou importante dès l'époque d'Euclide ?

Ce serait une faute assez grave d'affirmer que le mathématicien a, après tout, à faire des mathématiques et n'a pas trop à perdre son temps dans des réflexions trop attentives au sujet de questions esthétiques très profondes. Il n'a pas de temps à perdre pour raffiner un goût esthétique qui donc pourrait rester assez grossier en relation à ce qui a été développé dans d'autres branches de la créativité humaine qui, souvent d'ailleurs, font de la quête du beau leur principal but artistique. Le défaut principal de cette approche consiste dans le fait de négliger que la recherche de la beauté joue un rôle essentiel du point de vue cognitif – comme nous l'avons déjà souligné – dans le travail mathématique. C'est-à-dire que la recherche et la construction de la beauté sont des éléments essentiels et donc non séparables au sens strict du travail mathématique. C'est à la suite de cette remarque que la caractérisation de la beauté mathématique devient essentielle pour une recherche philosophique visant à isoler les éléments fondamentaux des mathématiques. Pour ce faire, il faut bien saisir que le caractère essentiel de la beauté mathématique réside dans son opérativité. Pour donner quelques éléments supplémentaires – quelques prolégomènes, pour ainsi dire – d'une telle analyse, il nous faut revenir, encore une fois, à la métaphore de l'architecte et de l'artisan. La connexion interne de cette activité nous est exprimée aussi bien par les considérations précédentes – le travail des mathématiciens est à situer entre ces deux points extrêmes – et par une conséquence qui en découle directement : ni l'architecte, ni, encore moins, l'artisan ne peuvent être compris dans leur activité si on ne saisit pas que leur travail va *coudre un tissu commun*. Un *tissu commun* indique l'appartenance à un même projet expressif dont chaque élément est sous la responsabilité de chacune des deux figures par lesquelles nous venons de métaphoriser le travail des mathématiciens. Ce *tissu commun* s'articule en une floraison indéfinie d'horizons de possibilités créatives. Cet élément est vraiment capital : le travail mathématique est, en quelque sorte, fatalement orienté vers un

agrandissement progressif, vers une prolifération de ses horizons. Cela suggère une forme nouvelle de plaisir esthétique dans une direction que jusqu'à présent nous avons tout au plus esquissée : en un certain sens le plaisir esthétique est obtenu lorsqu'on découvre une unité, une continuité entre les différentes filières mathématiques. Et, en quelque sorte, cette recherche d'unité n'est jamais oubliée, elle est toujours sous-entendue dans l'activité mathématique. On ne renonce jamais à la quête de l'unité, même sous l'*impetus* des nouveaux résultats jaillissants par l'exploration d'horizons. C'est cette communauté d'ententes dans la diversité des approches qui nous montre le bon chemin : l'unité existe malgré (ou même grâce) ses apparences ; les mathématiques demeurent une. *Gens una sumus*. Et, en ce sens, la beauté en mathématiques redécouvre l'un des thèmes les plus classiques de la philosophie : *le retour du problème de la multiplicité dans la relation iridescente entre l'unité d'origine et du projet et la multiplicité des résultats*.

En ce sens, l'unité des mathématiques s'enclenche, à son tour, dans la grande unité du flux des créations idéales humaines. Par exemple, nous pouvons retrouver la quête et la nature aussi de cette unité dans les grandes architectures musicales. Et immédiatement nous vient à l'esprit le nom de J.-S. Bach. Il suffit de penser à *L'offrande musicale* (BWV 1079) où la créativité du mathématicien s'exprime à partir de l'unité du thème, le *Thema Regium*. Autrement dit, une créativité qui s'exprime à partir d'une cellule significative élémentaire et qui prolifère comme lors d'une explosion contrôlée. Peut-être que cette puissance créatrice s'exprime bien par l'un des Canons les plus célèbres de cette composition, le *Quaerendo invenietis* (*En cherchant, vous trouverez*) qui semble aussi bien résumer ce que nous entendions caractériser comme l'élément crucial du travail du mathématicien. Il résume aussi bien le travail de l'architecte – capable d'imaginer et de créer une grande structure, capable donc d'une sorte de *grand rêve* – et de l'artisan dont le travail, à l'apparence plus modeste, s'occupe proprement de coudre et recoudre l'acte de *chercher* et l'acte de *trouver*.

Encore dans le travail de J.-S. Bach on peut retrouver des autres éléments capables de rendre au mieux la métaphore de la création mathématique. Pensons, par exemple, à sa dernière composition : le célèbre *Art de la Fugue* (BWV 1080). En raison de la mort de l'auteur, le *Contrepoint XIV* reste inachevé. Et la métaphore est prête pour l'utilisation : le matériau de base, le thème, se développe, croît sur lui-même, travaille incessamment. L'absence d'une conclusion formelle, même en présence de plusieurs conclusions partielles – les contrepoints formant l'*Art de la Fugue* – nous pousse de plus en plus en avant. Vers l'enrichissement perpétuel de cette structure, avec un éloignement correspondant des horizons qui s'ouvrent à chaque pas. Prolifération et multiplication dans

l'unité. On peut bien penser à une nouvelle définition tentant de rendre raison du maintien de cette unité dans la variété multicolore des images différentes par lesquelles ces moments de la créativité humaine s'offrent. Il faut avoir le courage de l'affirmer : aussi bien les musiciens que les mathématiciens sont des créateurs d'univers.

Ce thème est depuis toujours l'une des sources principales de la réflexion philosophique. Et l'une des synthèses les plus belles de tout ce que cela implique a été donnée par Platon lorsqu'en caractérisant l'action du Démon, il écrit :

Lorsque Dieu entreprit d'ordonner le tout, au début, le feu, l'eau, la terre et l'air portaient des traces de leur propre nature, mais ils étaient tout à fait dans l'état où tout se trouve naturellement en l'absence de Dieu. C'est dans cet état qu'il les prit, et il commença par leur donner une configuration distincte au moyen des idées et des nombres. Qu'il les ait tirés de leur désordre pour les assembler de la manière la plus belle et la meilleure possible, c'est le principe qui doit nous guider constamment dans toute notre exposition.²⁴

Nous pouvons terminer ici, en ajoutant une petite observation qui nous permet de fermer le cercle idéal ouvert par le texte d'H. Weyl que nous avons mis en exergue : nous ne savons pas et, probablement, nous ne saurons jamais si ce que Platon a écrit est vrai, mais sans doute c'est beau. Et, pour maintenant, mais pour maintenant seulement, cela peut nous suffire.

²⁴ Platon, *Timée* 52C - 53C. Nous avons pris cette citation à Platon, *Sophiste, Politique, Philèbe, Timée, Critias*, GF Flammarion, Paris, 1991 ; p. 431.

Alcune osservazioni fenomenologiche sulla bellezza nella matematica

L'articolo propone un'analisi fenomenologica della nozione di bellezza in matematica, muovendo dall'esperienza concreta dei matematici e dalle loro pratiche effettive, piuttosto che da interpretazioni esterne o puramente estetiche. Gli autori mostrano come la bellezza matematica non possa essere ridotta a un criterio formale o soggettivo, ma emerga da una pluralità di caratteri – quali chiarezza, sorpresa, unificazione, fecondità concettuale – che si manifestano in modo differenziato nelle dimostrazioni, nei teoremi e nella costruzione delle teorie. Attraverso riferimenti a matematici come Gauss, Hardy, Rota, Atiyah e Mac Lane, e mediante esempi tratti dall'analisi, dalla geometria e dalla probabilità, l'articolo mette in luce il ruolo cognitivo della bellezza, intesa come guida alla comprensione e come principio di orientamento della ricerca. In dialogo con la fenomenologia husserliana e con contributi di Merleau-Ponty e Richir, la bellezza viene infine interpretata come espressione di uno stile e di una “armonizzazione” interna alle istituzioni simboliche della matematica, radicate nella loro storia e nella loro dimensione culturale.

PAROLE CHIAVE: Mathematical beauty; Fenomenologia; Pratica matematica; Stile e armonia; Filosofia della matematica

Some phenomenological remarks on beauty in mathematics

The paper offers a phenomenological analysis of mathematical beauty, starting from the concrete experience of mathematicians and their actual practices rather than from external or purely aesthetic interpretations. The authors argue that mathematical beauty cannot be reduced to a formal or subjective criterion, but emerges from a plurality of features—such as clarity, surprise, unification, and conceptual fruitfulness—which appear in different ways in proofs, theorems, and the construction of theories. Drawing on reflections by mathematicians such as Gauss, Hardy, Rota, Atiyah, and Mac Lane, and through examples taken from analysis, geometry, and probability theory, the paper highlights the cognitive role of beauty as a guide to understanding and as an orienting principle in mathematical research. In dialogue with Husserlian phenomenology and with contributions from Merleau-Ponty and Richir, beauty is ultimately interpreted as the expression of a style and of an internal “harmonization” within the symbolic institutions of mathematics, rooted in their historical and cultural dimension.

KEYWORDS: Mathematical beauty; Phenomenology; Mathematical practice; Style and harmony; Philosophy of mathematics

Sofia Cattani

La bellezza delle dimostrazioni matematiche nella filosofia critica di Kant

Il problema della bellezza della matematica non riceve mai una trattazione sistematica all'interno del corpus kantiano e manca non solo di coerenza tra il periodo precritico¹ e quello critico, ma anche di continuità all'interno della *Critica della facoltà di Giudizio*. In quest'opera Kant accenna più volte alla questione con osservazioni marginali, finché non affida al §62 l'esposizione più ampia e coesa, la cui conclusione tuttavia scioglie il problema in modo solo apparente, lasciandolo piuttosto oscuro.

La Grande Teoria², radicata nelle filosofie pitagorica e platonica, considerava la bellezza come una proprietà dell'oggetto, fenomenologicamente riscontrabile nell'*ἀρμονία* e nella *συμμετρία* della disposizione delle sue parti, precisamente misurabili e, dunque, numerabili. Kant vi oppone invece una riflessione che fonda nel sentimento del soggetto, come effetto

¹ Per i testi di Kant si cita secondo la paginazione dell'*Akademie-Ausgabe* [AA]: *Kants gesammelte Schriften*, hrsg. von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, de Gruyter, Berlin 1900–. Numerosi sono i riferimenti di Kant alla bellezza o alla perfezione della matematica, della logica o più in generale della scienza e della conoscenza scientifica nelle *Vorlesungen über Logik*. Scrive ad esempio nella *Logik Blomberg*: “es giebt wirklich ganz und gar keine Wissenschaft des Schönen eigentlich, sonderen was wir je vom Schönen wissen, das ist nichts als eine Critica” (AA 24:51). Sempre nello stesso testo: “Von einer schönen Erkenntniß aber läßt sich eigentlich gar kein Urtheil machen [...] Die Frantzosen beobachten mehrentheils nur die Aesthetische Vollkommenheit. Wenn sie Gründe von etwas untersuchen, und von einer Sache deutliche Begriffe haben wollen, so laßen sie sich in das schöne, rührende, und gefallende ein, und dadurch thuen sie der Logischen Vollkommenheit großen Schaden” (AA 24:51-52). Un più specifico riferimento alla matematica è invece: “Die Praecision ist also nichts anders als eine Regel der Sparsamkeit, die eben daher auch eine gewisse innere Schönheit hat: Sie ist besonders in der Mathematic, in der Geometrie, und in der Mechanic anzutreffen” (AA 24:140).

² W. Tatarkiewicz, *Storia di sei idee*, a cura di L. Russo, tr. it. O. Burba e K. Jaworska, Aesthetica, Palermo 1997, pp. 134-162.

del libero gioco delle sue facoltà conoscitive, la possibilità di predicare il bello “come se” fosse una proprietà dell’oggetto.

Ai filosofi che vedono nelle forme geometriche e nei numeri un paradigma di bellezza, Kant non può quindi che obiettare come questo non possa essere un “giudicare estetico”, non trattandosi di un giudizio soggettivo né senza concetto, ma affermando però che, al più, “si potrebbe chiamare bella una dimostrazione di tali proprietà”:

Si è soliti chiamare bellezza le proprietà ricordate, tanto delle forme geometriche quanto dei numeri, a causa di una certa loro conformità a scopi a priori, rispetto a ogni sorta di usi conoscitivi, che è inaspettata dal punto di vista della semplicità della loro costruzione; e si parla per esempio di questa o quella bella proprietà del cerchio che sarebbe stata scoperta in questo o quel modo. Solo che non è un giudicare estetico, non un giudicare senza concetto, che ci faccia notare una semplice conformità a scopi soggettiva nel libero gioco delle nostre facoltà conoscitive, quello con cui noi la troviamo conforme a scopi, ma è un giudicare intellettuale secondo concetti, che ci fa conoscere distintamente una conformità oggettiva a scopi, vale a dire un’idoneità per ogni sorta di scopi (molteplici all’infinito). Si dovrebbe chiamarla piuttosto una perfezione relativa della figura matematica, che una sua bellezza. [...] Semmai si potrebbe chiamare bella una dimostrazione di tali proprietà, dal momento che mediante essa l’intelletto, in quanto facoltà dei concetti, e l’immaginazione, in quanto facoltà della loro esibizione, si sentono a priori fortificati (il che, insieme alla precisione che la ragione introduce, vien detto eleganza della dimostrazione), in quanto in questo caso il compiacimento, sebbene il suo fondamento stia in concetti, almeno è soggettivo, mentre la perfezione comporta un compiacimento oggettivo.³

Forme geometriche e numeri certamente producono un piacere, ma questo non si può ascrivere all’armonia nell’accordo delle facoltà conoscitive nel loro libero gioco, quanto piuttosto all’ammirazione (*Bewunderung*) che procura la loro conformità a molteplici scopi possibili. Il concetto, cioè non esiste in virtù di un unico scopo e il reciproco legame tra i diversi concetti della matematica costruiti a priori, si prestano alla soluzione di più problemi⁴. Il piacere che ne risulta è quindi più affine alla perfezione. Che gli enti matematici⁵ non si possano considerare belli è affermato con coerenza da parte di Kant nel corso di tutta l’opera:

³ I. Kant, *Critica della facoltà di giudizio*, a cura di E. Garroni, H. Hohenegger, Einaudi, Torino 2011, pp. 199-200.

⁴ M. L. Bianchi, *Commento alla “Critica della facoltà di giudizio” di Kant*, Firenze, Le Monnier 2005, p. 157

⁵ Poiché Kant nel §62 si riferisce a figure geometriche e numeri in modo alterno, da qui in poi con “enti matematici” si indicheranno entrambi.

Le figure geometricamente regolari, un cerchio, un quadrato, un cubo, e così via, sono comunemente citate dai critici del gusto come i più semplici e indubbi esempi della bellezza; e tuttavia esse sono dette appunto regolari proprio perché non si può rappresentarle altrimenti che considerandole semplici esibizioni di un concetto determinato, che prescrive a quella figura la regola (secondo la quale, soltanto, essa è possibile). [...] si tratta semplicemente dell'approvazione che si dà alla soluzione soddisfacente di un compito, e non di un intrattenimento delle facoltà dell'animo, libero e conforme a scopi in modo indeterminato⁶

Per quanto riguarda le dimostrazioni invece, Kant non spiega mai esattamente in che modo una dimostrazione possa essere bella e la conclusione del §62 rimane un *unicum* nella trattazione della questione nel periodo critico. Ciononostante, si tenterà qui di gettare luce su questa enigmatica affermazione di Kant, contestualizzandola all'interno della *Critica della facoltà di giudizio* e sulla base della considerazione della matematica che emerge nella *Critica della ragion pura*.

Per comprendere se e in che modo le dimostrazioni possano essere considerate belle (sempre nella prospettiva kantiana del “come se”), occorre innanzitutto andare alle radici della curiosa distinzione introdotta da Kant tra gli enti matematici e le dimostrazioni matematiche. I primi non si possono rappresentare se non considerandoli come “semplici esibizioni di un concetto determinato, che prescrive [...] la regola”, escludendo quindi un fondamento nel soggetto. Nelle dimostrazioni matematiche, invece, in modo analogo al *libero gioco*, “l'intelletto, in quanto facoltà dei concetti, e l'immaginazione, in quanto facoltà della loro esibizione, si sentono a priori fortificati”, rendendo possibile quel “compiacimento soggettivo” proprio dell'esperienza estetica.

1. Gli enti matematici e la *Steif-Regelmäßigkeit* degli schemi

Come già esposto, è chiaro per Kant, ed è ribadito più volte nel corso della *Critica*, che non si possano rappresentare gli enti matematici se non considerandoli come semplici esibizioni di un concetto determinato che ne prescrive la regola. Ciò che risulta meno immediato capire è perché.

Dalla discussione sui quattro momenti del giudizio di gusto nell'*Analitica del bello*, emerge come il *Bestimmungsgrund* di questo singolare tipo di giudizio debba essere “senza concetto”⁷ e la sua *Zweckmäßigkeit*

⁶ I. Kant, *Critica della facoltà di giudizio*, cit., pp. 77-78.

⁷ Ivi, p. 55.

debba essere *ohne Zweck*, e nel §62 è affermato chiaramente che agli enti matematici pertiene “un giudicare intellettuale secondo concetti, che ci fa conoscere distintamente una conformità oggettiva a scopi”: quanto di più lontano possa esserci da un giudizio estetico.

Kant però non dà mai una definizione di un oggetto bello né delinea in alcun modo una “classe degli oggetti belli”⁸, così che la distinzione tra bellezza aderente e bellezza libera posta nel §16 non si configura come una distinzione ontologica, ma riguarda piuttosto la prospettiva che si assume nella considerazione della rappresentazione. E in realtà, già nel §1, Kant sembra ridimensionare l'importanza della natura della rappresentazione, che appare secondaria, se non irrilevante, rispetto alla disposizione del soggetto, per determinare se un giudizio sia estetico o meno:

Rappresentazioni date, in un giudizio, possono essere empiriche (e perciò estetiche), eppure il giudizio che vien dato mediante esse è logico, se solo, nel giudizio, le rappresentazioni siano riferite all'oggetto. Viceversa però, se le rappresentazioni date fossero addirittura razionali, ma venissero tuttavia riferite in un giudizio esclusivamente al soggetto (al suo sentimento), allora esse sarebbero in tal caso sempre estetiche.⁹

Dunque persino sulle rappresentazioni razionali si potrebbe dare un giudizio estetico, se il compiacimento fosse riferito al soggetto.

Se quindi ai fini di questo tipo di giudizio, le loro proprietà in quanto rappresentazioni oggetto di giudizio non sono rilevanti, l'affermazione kantiana per cui gli enti matematici non possano che essere considerati secondo un concetto, stona, al punto che anche Scaravelli si trova ad ammettere che non vi è ragione teoretica o speculativa che porti a escludere una contemplazione delle rappresentazioni degli enti matematici¹⁰, poiché per giudicare della bellezza di una rappresentazione sarebbe sufficiente riferire “la rappresentazione non all'oggetto [...] ma al soggetto e al suo sentimento del piacere o del dispiacere”¹¹.

Nella *Critica della ragion pura* Kant afferma che i giudizi della matematica sono tutti sintetici e a priori¹², ovvero sono estensivi per la nostra conoscenza, ma in modo assolutamente indipendente da ogni esperienza¹³.

⁸ Ivi, p. LII.

⁹ Ivi, p. 40.

¹⁰ L. Scaravelli, *Scritti kantiani*, La nuova Italia, Firenze 1968, p. 516.

¹¹ I. Kant, *Critica della facoltà di giudizio*, cit., p. 39.

¹² I. Kant, *Kritik der reinen Vernunft*, in *Gesammelte Schriften*, cit., Bd. III–IV, B15–B16; trad. it. *Critica della ragion pura*, a cura di C. Esposito, Bompiani, Milano 2004. Le sigle A e B rinviano rispettivamente alla prima edizione (1781) e alla seconda edizione (1787) dell'opera.

¹³ Ivi, B3.

Perché questo sia possibile, gli oggetti della matematica devono poter essere presentati nell'intuizione pura a priori¹⁴ e non derivandoli dall'esperienza. E infatti, i concetti della matematica sono *costruiti*, ovvero, è esposta a priori l'intuizione corrispondente al concetto¹⁵, operazione per cui “è necessaria un'intuizione non empirica”¹⁶ come “oggetto singolo”, che esprima però “nella rappresentazione una validità universale per tutte le intuizioni possibili che rientrano sotto lo stesso concetto”¹⁷.

Il matematico infatti non osserva, ad esempio, un triangolo già dato per apprenderne le proprietà, ma lo *produce*¹⁸ secondo ciò che lui stesso ha pensato e vi ha rappresentato a priori in conformità al suo concetto. Questo *Übersetzungsprozess*¹⁹, per cui la singola intuizione individuale rappresenta un concetto che ha validità universale, è reso possibile dall'identica operazione (*Handlung*) della costruzione che vi si trova alla base, dettata dalla “regola della sintesi della facoltà di immaginazione”²⁰, ovvero dallo schema, che è generale, in quanto “rappresentazione di un metodo”²¹. Lo schema fornisce unicamente le determinazioni che sono comuni a tutti i triangoli, poi rappresentabili concretamente, anche in un'intuizione empirica, e quindi fonda la possibilità di ogni determinazione empirica.

Costruire un concetto significa dunque produrne lo schema come descrizione, che deve valere per tutte le intuizioni possibili che appartengono a quel concetto e lo esibiscono²². Lo schema del triangolo è una composizione di tre linee tali che la somma di due, comunque presi, sia maggiore del terzo, e la lunghezza dei singoli lati è indifferente. Similmente, la regola della costruzione di un qualunque numero n , sarà sempre “l'addizione successiva di uno a uno”²³ ripetuta n volte, indipendentemente da quale sia il valore di n , e così la somma “ $5+2$ ” non è altro che la ripetizione dell'addizione di un'unità sette volte. Seguendo tali regole di costruzione si possono poi produrre infinite immagini, rappresentazioni singole ed empiriche.

Il matematico però non opera con le immagini, ma con gli schemi:

Se io pongo, uno dopo l'altro, cinque punti, questa sarà un'immagine del numero cinque. Se invece penso soltanto un numero in generale – che

¹⁴ Ivi, BX.

¹⁵ Ivi, B741.

¹⁶ Ivi, B714.

¹⁷ Ivi, B741.

¹⁸ Ivi, BXII.

¹⁹ M. Palumbo, *Immaginazione e matematica in Kant*, Laterza, Roma 1985, p. VI.

²⁰ I. Kant, *Critica della ragion pura*, cit., B180.

²¹ Ivi, B179.

²² M. Palumbo, *Immaginazione e matematica in Kant*, cit., pp. 60-62.

²³ I. Kant, *Critica della ragion pura*, cit., B182.

potrebbe essere cinque oppure cento –, questo pensiero sarà la rappresentazione di un metodo per rappresentare, secondo un certo concetto, una pluralità (per esempio mille) in un'immagine, piuttosto che questa immagine stessa, che nel caso del 1000 difficilmente potrei abbracciare con lo sguardo e confrontare con il concetto. È dunque questa rappresentazione di un modo generale di procedere della facoltà di immaginazione, consistente nel procurare ad un concetto la sua immagine, ciò che io chiamo lo schema di questo concetto.²⁴

Kant tiene distinti l'immagine di un numero e il *pensiero* di un numero, che non è l'immagine ma il *metodo* per rappresentare il molteplice in un'immagine²⁵. Attraverso l'immagine l'ente matematico si rappresenta come un dato, in base allo schema invece questa è solamente una regola per la sua costruzione come dato²⁶. Dunque il passaggio dall'intuizione allo schema è immediato²⁷. Questo implica che prima ancora di essere oggetti nell'intuizione pura, gli enti matematici sono schemi, o, meglio, la loro considerazione in quanto oggetti nell'intuizione pura non può essere scissa dalla regola della loro costruzione. Questo è il vero aspetto che rende problematica una considerazione estetica degli enti matematici.

Nella *Critica della facoltà di giudizio*, nella *Nota generale alla prima sezione dell'analitica*, Kant dà ampio spazio alla nozione di “libero gioco”, in cui l'immaginazione interagisce con l'intelletto senza essere sottoposta alla “costrizione molesta”²⁸ di quest'ultimo. L'intelletto apporta infatti pur sempre la propria legalità²⁹ all'immaginazione, ma solo “in genere”, ovvero non vi è la sussunzione di un'intuizione determinata sotto un concetto determinato, ma “dell'immaginazione stessa (in una rappresentazione con cui è dato un oggetto) sotto le condizioni per cui l'intelletto in genere procede dall'intuizione a concetti”³⁰. L'attività dell'immaginazione rimane quindi *libera* da una legge determinata ma non del tutto arbitraria nella sua conformità a leggi dell'intelletto, ovvero “schematizza senza concetto”³¹. Si potrebbe dire che il contributo dell'intelletto consista non tanto nell'apportare ordine, quanto nell'escludere disordine³². In questo senso va dunque inteso il “libero gioco” delle facoltà conosci-

²⁴ I. Kant, *Critica della ragion pura*, cit., B180. Corsivo mio.

²⁵ L. Scaravelli, *Scritti kantiani*, cit., p. 521.

²⁶ Ivi, p. 522.

²⁷ Ivi, p. 523.

²⁸ I. Kant, *Critica della facoltà di giudizio*, cit., p. 79.

²⁹ F. Menegoni, *La “Critica del giudizio” di Kant. Introduzione alla lettura*, NIS, Roma 1995, p. 75.

³⁰ I. Kant, *Critica della facoltà di giudizio*, cit., p. 123.

³¹ *Ibid.*

³² L. Pareyson, *L'estetica di Kant. Lettura della “Critica del Giudizio”*, Mursia, Milano 1984, p. 87.

tive, immaginazione e intelletto, ovvero, “nessun concetto determinato le limita a una particolare regola conoscitiva”³³, al contrario del gioco “non libero”³⁴ dei giudizi logici. Per tale motivo Garroni definisce il “libero gioco” un “libero schematismo”³⁵. Questo può essere letto come il *pendant* dello “schematismo oggettivo”³⁶, *hapax* usato nella *Critica della ragion pura* per riferirsi allo schematismo sottoposto alla legge determinata del concetto.

Di conseguenza

Tutto ciò che è rigidamente conforme a regole (che si avvicina alla conformità matematica a regole) ha in sé qualcosa che è contrario al gusto: cioè non concede che ci si intrattenga a lungo nel riguardarlo, ma, in quanto espressamente non ha di mira la conoscenza o uno scopo pratico determinato, produce noia. Al contrario ciò con cui l’immaginazione può giocare in modo spontaneo e conforme a uno scopo è per noi sempre nuovo, e non ci si stanca mai della sua vista.³⁷

Non è però una semplice conformità a regole ad escludere la considerazione estetica, ma una *rigida* conformità a regole (*Steif-Regelmäßigkeit*), al punto che, precisa Kant, “*si avvicina alla conformità matematica a regole*”. È infatti tale da “non permette[re] di intrattenersi a lungo nel riguardarlo [l’oggetto]”.

Il problema risiede quindi nella regolarità che pervade la matematica, al punto che proprio con essa è identificata la rigida conformità a regole. Figure geometriche e numeri non semplicemente si “avvicinano” alla *Steif-Regelmäßigkeit* della matematica, ma, in quanto innanzitutto schemi, *sono* quella *Steif-Regelmäßigkeit*. Non possono non essere considerati secondo uno “schematismo oggettivo”, perché sono già quello “schematismo oggettivo”, e così tutte rappresentazioni che si avvicinano alla conformità a regole della matematica si assimilano sempre più al proprio schema, fino a coincidervi, come è il caso della matematica stessa³⁸.

Chiedersi se gli enti matematici possano essere belli equivale dunque a chiedersi se delle regole, dei metodi di costruzione, possano essere belli, ed è questo in ultima analisi che Kant non può accettare e che rende impossibile rappresentare gli enti matematici se non come “semplici esi-

³³ I. Kant, *Critica della facoltà di giudizio*, cit., pp. 52-53.

³⁴ E. Garroni, *Estetica ed epistemologia*, Bulzoni Editore, Roma 1976, p. 87.

³⁵ E. Garroni, H. Hohenegger, *Introduzione a I. Kant, Critica della facoltà di giudizio*, cit., p. XLVI.

³⁶ I. Kant, *Critica della facoltà di giudizio*, cit., p. 54.

³⁷ Ivi, p. 78.

³⁸ L. Scaravelli, *Scritti kantiani*, cit., p. 524.

bizioni di un concetto determinato”³⁹, secondo cui lo schema dell’immaginazione opera.

Tuttalpiù, seguendo questo ragionamento, si potrebbe definire bella un’immagine di un triangolo o di un numero, ma questa rimanda anche immediatamente allo schema del triangolo o del numero, dunque, tutto ciò potrebbe valere solo per chi non abbia alcun concetto di cosa sia un triangolo o un numero, ma non certamente per una persona istruita in materia come Kant.

2. Le dimostrazioni e il “libero gioco”

Si deve ora capire perché le dimostrazioni della matematica, a differenza delle figure geometriche e dei numeri, possono essere considerate belle, ovvero perché in questo caso “l’intelletto, in quanto facoltà di concetti, e l’immaginazione, in quanto facoltà della loro esibizione, si sentono a priori fortificati” e quindi perché “il compiacimento, sebbene il suo fondamento stia in concetti, almeno è soggettivo”.

Non è facile mettere a fuoco quale concezione Kant abbia delle dimostrazioni matematiche, perché nei suoi stessi testi rimane poco chiara, soprattutto nella *Critica della ragion pura*. Infatti nell’*Estetica trascendentale*, Kant le tralascia⁴⁰, risultando più interessato agli assiomi e alle caratteristiche della matematica che permettono di fondarla come scienza. Anche nella *Disciplina della Ragione Pura nel suo uso dogmatico*, pur dedicando alla dimostrazione una trattazione sistematica, non ne fornisce una vera e propria definizione, così che la distinzione rispetto ai giudizi e agli assiomi non risulta netta⁴¹. Qui afferma che “sempre guidato”⁴² dall’intuizione, egli [il geometra] giungerà mediante una catena inferenziale a una soluzione del tutto illuminante e al tempo stesso universale del problema”⁴³ e che “soltanto una prova apodittica, nella misura in cui è intuitiva, può chiamarsi dimostrazione”⁴⁴.

È vero che Kant non si riferisce esplicitamente alle inferenze come sintetiche e che questa connessione con l’intuizione potrebbe essere dovuta semplicemente al fatto che le inferenze sono solo in principio basa-

³⁹ I. Kant, *Critica della facoltà di giudizio*, cit., p. 77.

⁴⁰ Ivi, p. 158.

⁴¹ G. Bird, *The Revolutionary Kant*, Open Court, Chicago e La Salle 2006, pp. 152-153.

⁴² Kant spiega meglio poco prima (*Critica della ragion pura*, B742-745) che la conoscenza matematica costruisce i propri concetti, ovvero presenta a priori l’intuizione corrispondente al concetto. Freedman commenta più precisamente questo passo (M. Freedman, *Kant and the exact sciences*, Harvard University Press, Cambridge 1992, pp. 56-58).

⁴³ I. Kant, *Critica della ragion pura*, cit., B745.

⁴⁴ Ivi, B762.

te su delle costruzioni intuitive⁴⁵, tanto che alcuni commentatori⁴⁶ sono giunti alla conclusione che Kant consideri la matematica sintetica sulla base solamente dei giudizi e degli assiomi. Le due interpretazioni si fondano però su due passi diversi, la prima su un passo della *Dottrina del metodo* e la seconda su un passo dell'*Estetica trascendentale*. Quest'ultima inoltre non intende soffermarsi sulle dimostrazioni ma pone piuttosto l'attenzione sui giudizi. Dunque, è ragionevole pensare che le due visioni possano essere conciliate risultando anche complementari, e che la differenza tra principi di inferenze e assiomi rimanga non rigorosa: i principi delle inferenze possono talvolta essere sostituiti dagli assiomi e gli assiomi e i teoremi possono in alcuni casi essere considerati come regole derivate da inferenze⁴⁷. Anche Hintikka⁴⁸ e Parson⁴⁹ hanno presentato delle obiezioni alla possibilità che tutte le dimostrazioni si servano dell'intuizione, ma, d'altronde, Kant stesso si esprime in modo incerto, con il *Konjunktiv II* "würde".

Si può quindi accettare una definizione della dimostrazione come prova apodittica e concatenazione di inferenze guidata dall'intuizione (pura)⁵⁰. Di conseguenza, risulta essenziale per le dimostrazioni la costruzione nell'intuizione pura o, meglio, la costruzione nell'intuizione pura di concetti. Le dimostrazioni stesse sono quindi fondate su costruzioni di concetti ed è per questo che, anche in questo caso, il fondamento del compiacimento riposa su concetti.

Le dimostrazioni però non sono concetti né tantomeno sono schemi. Infatti Longuenesse fa notare che certamente il matematico sa cosa vuole dimostrare e che le sue costruzioni sono giustificate dallo scopo che servono e dai principi di cui di volta in volta vuole servirsi, tuttavia, la scelta di questi principi, e quindi delle costruzioni che presenta in concreto nell'intuizione, non dipendono da una regola⁵¹.

Mentre il triangolo isoscele riporta immediatamente allo schema del triangolo isoscele, ovvero alla sua regola di costruzione, la dimostrazione

⁴⁵ G. Bird, *The Revolutionary Kant*, cit., p. 152.

⁴⁶ G. Brittan, *Kant's Theory of Science*, Princeton University Press, Princeton 1978; C. Parsons, "Kant's Philosophy of Arithmetic" and "Arithmetic and the Categories," in C. Posy (a cura di.), *Kant's Philosophy of Mathematics: modern essays*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1992, pp. 43-68 e pp. 135-158.

⁴⁷ G. Bird, *The Revolutionary Kant*, cit., p. 153.

⁴⁸ I. Hintikka, "Kant on the Mathematical Method", in C. Posy (a cura di.), *Kant's Philosophy of Mathematics: modern essays*, cit., pp. 21-42.

⁴⁹ C. Parsons, "Kant's Philosophy of Arithmetic", in C. Posy (a cura di.), *Kant's Philosophy of Mathematics: modern essays*, cit., pp. 43-68.

⁵⁰ M. Freedman, *Kant and the Exact Sciences*, cit., p. 57.

⁵¹ B. Longuenesse, *Kant and the Capacity to Judge. Sensibility and Discursivity in the Transcendental Analytic of the Critique of the Pure Reason*, tr. ing. di C. T. Wolfe, Princeton University Press, Princeton 1998, p. 288.

del teorema di Pitagora non riporta immediatamente alla regola della dimostrazione del Teorema di Pitagora, semplicemente perché la dimostrazione del Teorema di Pitagora non esiste, ma vi sono piuttosto molteplici dimostrazioni del teorema di Pitagora, che hanno come unica determinazione lo scopo di dimostrare una tesi (l'enunciato del Teorema di Pitagora), ma non hanno una regola che ne determini lo svolgimento. La dimostrazione si configura infatti come un procedimento in cui, nella prospettiva della regolarità di Scaravelli, ci si serve di regole ma non c'è una vera e propria regola su come servirsi di tali regole, quindi, ci si intrattiene in un'attività che non è sottoposta alla rigida regolarità (*Steif-Regelmäßigkeit*) di uno schema già determinato, come sono invece le figure geometriche e i numeri nella loro semplice costruzione. Per Kant la matematica, a differenza della filosofia, si può imparare, ma a questo punto è più legittimo pensare che si possano imparare proprio quelle regole di costruzione degli enti matematici. La capacità di servirsi di regole resta invece una prerogativa della *Urteilkraft*, che non si può insegnare ma riposa sul *Mutterwitz*⁵².

L'immaginazione resta dunque libera nel senso di una *freie Gesetzmäßigkeit* (libera conformità a leggi) e gioca con il molteplice sensibile combinandolo in modalità sempre nuove e inaspettate, che non costituiscono ancora l'esibizione di un concetto determinato. Solo retrospettivamente è possibile ricostruire questa catena di inferenze e presentarla come una conoscenza strutturata, con diverse e determinate modalità di svolgimento⁵³ che possono essere infine insegnate e apprese. In questo modo si può, ad esempio, scegliere se dimostrare un medesimo teorema per assurdo o per induzione secondo quanto si è già studiato. In questo senso quindi il geometra è guidato dall'intuizione nelle sue dimostrazioni e considera l'universale in concreto nella singola intuizione⁵⁴ (intuizione che può essere empirica ma anche pura, poiché il geometra non sta visualizzando le figure nello spazio-tempo fisico ma nello spazio-tempo puro, cioè trascendentale).

Certamente si può obiettare che anche il triangolo isoscele può essere costruito secondo diverse regole (il triangolo è la sezione di piano compresa tra le tre diverse intersezioni di tre rette, il poligono la somma dei cui angoli è 180° ...), ma tutti i triangoli rispondono a ognuna di queste regole, mentre le diverse dimostrazioni di un teorema non rispondono ad una regola comune.

D'altronde, nello stesso passo in cui Kant assimila la *Steif-Regelmäßigkeit* alla conformità a regole propria della matematica, precisa anche che essa

⁵² I. Kant, *Critica della ragion pura*, cit., B172.

⁵³ A Breitenbach, *Beauty in Proofs: Kant on Aesthetics in Mathematics*, in "European Journal of Philosophy", XXXIII, n. 24, 2013, p. 967.

⁵⁴ I. Kant, *Critica della ragion pura*, cit., B763.

“non permette di intrattenersi a lungo nel riguardarlo [l’oggetto]” (daß es keine lange Unterhaltung mit der Betrachtung desselben gewährt⁵⁵). Una traduzione più letterale sarebbe “poiché questa [la *Steif-Regelmäßigkeit*] non permette un lungo intrattenersi con la contemplazione dello stesso [l’oggetto]”, esplicitando il senso di *Betrachtung* come “contemplazione”. Quest’ultima non è che il semplice riguardare gli oggetti nella riflessione⁵⁶, nella pura forma, senza interesse, peculiarità del giudizio di gusto puro (che infatti nel §5 è definito “contemplativ”⁵⁷). Sebbene Kant specifichi che la *Steif-Regelmäßigkeit* non permette una “lunga occupazione”, la contemplazione non è del tutto esclusa; è presente, e non per un certo statuto di una rappresentazione matematica, ma per la regolarità che una determinata rappresentazione matematica comporta, regolarità che, nel caso degli enti è *steif*, ma nel caso delle dimostrazioni, non lo è. Così anche la durata della contemplazione è rilevante semplicemente come effetto da cui però è poi necessario risalire alle reali cause, cioè alla regolarità più o meno rigida.

Si può quindi concludere che la lettura della *Nota generale alla prima sezione dell’analitica* alla luce della contrapposizione tra ciò che è rigidamente conforme a regole e ciò che non lo è, permette, se integrata con la considerazione delle dimostrazioni che si possono ricavare da B172 e B762-763 della *Critica della ragion pura*, di dare un’interpretazione almeno coerente, esaminate anche le diverse obiezioni alla natura intuitiva delle dimostrazioni, della considerazione della matematica nella *Critica della facoltà di giudizio*, conciliando l’impossibilità di parlare di bellezza a proposito di numeri e figure geometriche, con l’apertura, incerta, ma pur sempre presente, all’attribuzione della bellezza alle dimostrazioni.

3. Conclusione

Questa lettura della posizione di Kant sulle dimostrazioni apre lo spazio per due importanti riflessioni.

Innanzitutto, mette in luce una prima tensione che anima la *Critica della facoltà di giudizio* e che riguarda il ruolo della rappresentazione che occasiona il libero gioco delle facoltà. Tale rappresentazione è infatti spesso definita “empirica”. Tuttavia, nei passi qui considerati, in partico-

⁵⁵ I. Kant, *Gesammelte Schriften*, vol. V, Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin 1900, p. 242.

⁵⁶ I. Kant, *Critica della facoltà di giudizio*, cit., p. 73: “Ma, quando si tratta di giudicare se una cosa è bella, non si vuol sapere se a noi o a chiunque altro importi, o anche soltanto possa importare, della sua esistenza; ma come la giudichiamo contemplandola semplicemente [*in der bloßen Betrachtung*]”.

⁵⁷ Ivi, p. 45.

lare nella conclusione del §62 e nel §1, l'enfasi è posta sulla priorità della libertà dell'immaginazione rispetto a qualunque altra considerazione, al punto che persino la rappresentazione sembra irrilevante ai fini del giudizio di gusto. Quest'ultimo si fonderebbe infatti in ultima analisi su un compiacimento soggettivo, in cui immaginazione e intelletto "si sentono a priori fortificati": un compiacimento distinto dalla perfezione e assimilabile al bello, anche quando più strettamente legato a concetti, perché non *steif-regelmäßig*.

Tale lettura risulta inoltre interessante soprattutto se si considerano le posizioni di chi si muove nel suo stesso campo, quello filosofico, a confronto con quelle dei matematici. Si è brevemente accennato alla Grande Teoria, e quindi alla tendenza di molti matematici e filosofi dell'antichità a spiegare la bellezza della matematica e anche delle sue dimostrazioni in termini oggettivi, e così è avvenuto anche in ambito analitico in tempi più recenti⁵⁸. Il pensiero kantiano sembra invece più affine ai matematici, i quali, molto più dei filosofi, si sono soffermati sulla propria esperienza soggettiva. Poincaré, ad esempio, ha parlato di un "*sentiment estétique*"⁵⁹, un'"emozione estetica" intesa come un vero e proprio "piacere"⁶⁰ che motiva lo scienziato nella propria indagine.

Questo riferimento ad un più soggettivo "piacere" o "sentimento" non può essere trascurato, poiché non è un caso unico nel mondo della scienza, spingendo a confrontarsi con quella che sembra assumere i connotati di un'esperienza estetica⁶¹ per matematici e fisici. Inoltre, molti tra loro non si sono limitati a constatare la bellezza della matematica, ma hanno anche dichiarato di aver accolto considerazioni estetiche nel loro metodo e nei loro criteri di valutazione dell'indagine scientifica, preferendo una dimostrazione o una teoria piuttosto che un'altra⁶². Non si può quindi perlomeno escludere la possibilità di mettere a tema un'"anticipazione estetica" come criterio di orientamento nella scienza. Nel periodo critico Kant nega la possibilità di una "bella scienza"⁶³ e lega la figura del Genio

⁵⁸ C. S. Todd, *Unmasking the Truth Beneath the Beauty: Why the Supposed Aesthetic Judgements Made in Science May Not Be Aesthetic at All*, in "International Studies in the Philosophy of Science", XXII, n. 1, 2008, p. 62.

⁵⁹ H. Poincaré, *Science et méthode*, Ernest Flammarion, Parigi 1920, p. 57.

⁶⁰ Ivi, pp. 21-23.

⁶¹ *Ibid.*

⁶² Così il fisico-matematico Weyl, che ha dichiarato di aver sempre tentato di unire nel suo lavoro il vero e il bello, favorendo il secondo al primo quando ha dovuto scegliere (J. D. Freeman, "Obituary of Hermann Weyl", *Nature*, March 10 1956, pp. 457-458. Traduzione mia), o Copernico, che ha fatto dell'"armonia" un'argomentazione determinante in favore della sua teoria astronomica eliocentrica (N. Copernico, *De revolutionibus orbium caelestium*, tr. it. di A. Koyré, Einaudi, Torino 1975, p. 29.), che non era né più accurata né più semplice, da un punto di vista computazionale, rispetto alle altre contemporanee.

⁶³ I. Kant, *Critica della facoltà di giudizio*, cit., p. 149.

esclusivamente all'arte, precisando che “non può descrivere o mostrare scientificamente come realizza” il suo prodotto, e per questo a differenza dello scienziato, che può mostrare tutti i passi che ha compiuto per ottenere i propri risultati, non può essere imitato⁶⁴. Nega inoltre la possibilità di una “bella scienza”. Tuttavia Kant afferma che nella “scoperta” delle leggi empiriche riferite alla subordinazione di generi e specie, “un piacere c'è stato certamente a suo tempo e, solo perché la più comune esperienza non sarebbe possibile senza di esso, si è mischiato via via con la semplice conoscenza e non è stato più particolarmente notato”⁶⁵. Non si può quindi escludere che in un'eventuale euristica della scoperta, o in una sua estetica, la riflessione kantiana troverebbe il proprio posto.

Bibliografia

- Bianchi, M. L. *Commento alla “Critica della facoltà di giudizio” di Kant*, Firenze, Le Monnier 2005.
- Bird, G. *The Revolutionary Kant*, Open Court, Chicago e La Salle 2006.
- Breitenbach, A., *Beauty in Proofs: Kant on Aesthetics in Mathematics*, in “European Journal of Philosophy”, XXXIII, n. 24, 2013, pp. 955-977.
- Brittan, G., *Kant's Theory of Science*, Princeton University Press, Princeton 1978.
- Copernico, N., *De revolutionibus orbium caelestium*, tr. it. di A. Koyré, Einaudi, Torino 1975, p. 29.
- Freedman, M., *Kant and the Exact Sciences*, Harvard University Press, Cambridge 1992.
- Garroni, E., *Estetica ed epistemologia*, Bulzoni Editore, Roma 1976.
- Guyer, P., *Kant and the Claims of Taste*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts and London 1979.
- Hintikka, I. “Kant on the Mathematical Method”, in C. Posy (a cura di.), *Kant's Philosophy of Mathematics: modern essays*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1992, pp. 21-42.
- Kant, I. *Critica della ragion pura*, a cura di C. Esposito, Bompiani, Milano 2004.
- Kant, I. *Critica della facoltà di giudizio*, a cura di E. Garroni, H. Hohenegger, Einaudi, Torino 2011.
- Kant, I. *Gesammelte Schriften*, hrsg. v. der Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, de Gruyter, Berlin 1900.
- Longuenesse, B. *Kant and the Capacity to Judge. Sensibility and Discursivity in the Transcendental Analytic of the Critique of the Pure Reason*, tr. ing. di C. T. Wolfe, Princeton University, Princeton Press 1998.
- Menegoni, F. *La “Critica del giudizio” di Kant. Introduzione alla lettura*, NIS, Roma 1995.

⁶⁴ Ivi, pp. 144-145.

⁶⁵ Ivi, p. 23.

- Palumbo, M., *Immaginazione e matematica in Kant*, Laterza, Roma 1985.
- Pareyson, L. *L'estetica di Kant. Lettura della "Critica del Giudizio"*, Mursia, Milano 1984.
- Parsons, C. "Kant's Philosophy of Arithmetic", in C. Posy (a cura di.), *Kant's Philosophy of Mathematics: modern essays*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1992, pp. 43-68.
- Parsons, C. "Arithmetic and the Categories," in C. Posy (a cura di.), *Kant's Philosophy of Mathematics: modern essays*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1992, pp. 135-158.
- Poincaré, H. *Science et méthode*, Ernest Flammarion, Parigi 1920.
- Scaravelli, L. *Scritti kantiani*, La nuova Italia, Firenze 1968.
- Scaravelli, L. "La regolarità", in *Opere di Luigi Scaravelli*, vol. III, a cura di M. Corsi, La nuova Italia, Firenze 1968, pp. 81-94.
- Tatarkiewicz, W. *Storia di sei idee*, a cura di L. Russo, tr. it. di O. Burba e K. Jaworska, Aesthetica, Palermo 1997.
- Todd, C. S. *Unmasking the Truth Beneath the Beauty: Why the Supposed Aesthetic Judgements Made in Science May Not Be Aesthetic at All*, in "International Studies in the Philosophy of Science", XXII, n. 1, 2008, pp. 61-79.

La bellezza delle dimostrazioni matematiche nella filosofia critica di Kant

Questo articolo esamina la questione, non affrontata sistematicamente da Kant, della bellezza della matematica. Nella *Critica della facoltà di giudizio* Kant afferma più volte che numeri e figure geometriche, in quanto semplici esibizioni di concetti determinati e sottoposti a rigida conformità a regole (*Steif-Regelmäßigkeit*), non possono costituire oggetti di un giudizio estetico; nel §62 si apre però alla possibilità di considerare “bella” una dimostrazione. Si tenta qui di ricostruire e spiegare questa posizione ambigua, contestualizzandola anche alla luce della *Critica della ragion pura*. L’interpretazione proposta è che la matematica considera i numeri e le figure geometriche non come dati, ma come regole della loro costruzione, e quindi già come schemi, al polo opposto del libero schematismo che Kant pone a fondamento del giudizio di gusto. La dimostrazione dipende invece dalla capacità, che non può essere appresa, di servirsi di regole e non appare rigidamente vincolata a uno schema; in questo modo consente il “libero gioco” di immaginazione e intelletto e il compiacimento proprio dell’esperienza estetica.

PAROLE CHIAVE: Kant, bellezza, dimostrazioni matematiche, libero gioco, schematismo.

The Beauty of Mathematical Proofs in Kant's Critical Philosophy

This article examines the question – never systematically addressed by Kant – of the beauty of mathematics. In the *Critique of the Power of Judgment*, Kant repeatedly claims that numbers and geometrical figures, insofar as they are mere exhibitions of determinate concepts and subject to strict conformity to rules (*Steif-Regelmäßigkeit*), cannot constitute objects of aesthetic judgment. In §62, however, he opens up the possibility of considering a proof as “beautiful.” This paper attempts to reconstruct and clarify this ambiguous position, also contextualizing it in light of the *Critique of Pure Reason*. The interpretation proposed here is that mathematics regards numbers and geometrical figures not as given entities, but as rules of their construction, and thus already as schemata—standing in opposition to the free schematism that Kant identifies as the basis of judgments of taste. A proof, by contrast, depends on an ability that cannot be learned, namely, the capacity to employ rules without being rigidly bound to a schema. In this way, it enables the “free play” of imagination and understanding, together with the pleasure characteristic of aesthetic experience.

KEYWORDS: Kant, beauty, mathematical proofs, free play, schematism.

Fabio Sterpetti

Concezione assiomatica, dimostrazioni formali e meccanizzabilità della matematica

1. Alcuni problemi della concezione assiomatica della matematica

Secondo la concezione assiomatica moderna della matematica, che vede tra i suoi massimi rappresentanti Hilbert, il metodo della matematica è il metodo assiomatico e fare matematica significa principalmente dimostrare teoremi, ovvero produrre dimostrazioni in un sistema formale a partire da determinati assiomi. Le dimostrazioni sono una sequenza di deduzioni. In questa prospettiva, è il ragionamento deduttivo a caratterizzare il ragionamento matematico e la produzione di conoscenza matematica.

La concezione assiomatica moderna propugnata da Hilbert si liberava dalla problematica tesi relativa alla immediata comprensibilità degli assiomi che caratterizzava la concezione assiomatica classica, di ascendenza euclidea, sostituendola con la ricerca della dimostrazione formale della non contraddittorietà degli assiomi di un dato sistema formale¹. Hilbert riteneva che per fondare la matematica fosse necessario, senza ricorrere a procedimenti infinitari, dati i problemi che il concetto di infinito sollevava, dimostrare che un dato sistema formale F poteva esprimere tutte e sole le verità matematiche e che F era coerente, ovvero dimostrare in F la non contraddittorietà degli assiomi di F .

Un duro colpo a tale concezione fu portato dai teoremi di incompletezza di Gödel (1931). Il primo teorema di incompletezza di Gödel afferma infatti che, per ogni possibile sistema formale F sufficientemente potente da consentire di assiomatizzare la teoria elementare dei numeri naturali, se F è coerente, ci sono proposizioni indecidibili in F . Un enunciato γ è indecidibile in F se non è possibile dimostrare in

¹ Per una breve ricostruzione storica del metodo assiomatico, si veda Rodin 2014, parte I.

F né γ né $\neg\gamma$. Un tale sistema formale non può quindi essere completo, ovvero consentire di derivare tutte e sole le verità matematiche, in quanto uno tra γ e $\neg\gamma$ deve essere una verità matematica, ma non può essere un teorema di F . Dunque, F è incompleto. Il secondo teorema di incompletezza di Gödel afferma che, per ogni possibile sistema formale F sufficientemente potente da consentire di assiomatizzare la teoria elementare dei numeri naturali, se F è coerente, la coerenza di F non è dimostrabile in F . Dunque, non possiamo dimostrare con procedimenti finitari che tutta la matematica è coerente derivandola in un dato sistema F e dimostrando in F che F è coerente.

Nonostante ciò, ancora oggi «la concezione assiomatica è la concezione della matematica dominante» (Lavers 2024, p. 54). Molti autori sembrano non dare eccessivo peso ai risultati godeliani e ritengono che la concezione assiomatica e formale della matematica possa essere mantenuta, sebbene ammettano che vada in qualche modo aggiornata (von Plato 2018). Gödel stesso continuò a difendere l'idea che la matematica consista nella dimostrazione di teoremi attraverso il metodo assiomatico e che «tutto ciò che è matematico è formalizzabile» (Gödel 1935, p. 1), sostenendo che i teoremi di incompletezza implicano soltanto che per formalizzare tutta la matematica si debba ricorrere a una sequenza infinita di sistemi formali e non a un solo sistema formale dato come aveva sperato Hilbert. Si consideri, ad esempio, l'aritmetica di Peano, PA . Se PA è coerente, allora per il secondo teorema di Gödel, $Con(PA)$, ovvero l'enunciato che esprime la coerenza di PA , non è dimostrabile in PA . Ma se si passa a un sistema formale che contiene gli assiomi dell'aritmetica di Peano del secondo ordine, PA^2 , è possibile dimostrare in tale sistema formale $Con(PA)$. In PA^2 , per il secondo teorema di Gödel, non è possibile dimostrare $Con(PA^2)$. Ma se si passa a un sistema formale che contiene gli assiomi dell'aritmetica di Peano del terzo ordine, PA^3 , diviene possibile dimostrare in tale sistema formale $Con(PA^2)$, e così via. Dello stesso avviso è Curry, secondo cui i teoremi di incompletezza di Gödel mostrano solamente che il concetto di dimostrazione valida non può essere reso esaustivamente per mezzo di un singolo sistema formale (Curry 1977, p. 15).

Tuttavia, se tutta la matematica deve poter essere formalizzata e trattata assiomaticamente, allora anche la transizione da un sistema formale a quello successivo nella sequenza dei sistemi formali necessaria a formalizzare tutta la matematica dovrebbe essere formalizzabile. Infatti, se la transizione tra i successivi sistemi formali non fosse formalizzabile, non potrebbe sostenersi che realmente tutto ciò che è matematico è formalizzabile (Cellucci 2022, p. 32). Ma, se la transizione da un sistema formale a quello successivo nella sequenza di sistemi formali è essa stessa formalizzabile, allora, come scrive McCarthy, per la sequenza dei sistemi formali

sarà possibile dimostrare un teorema che è un «esatto analogo» del primo teorema di incompletezza di Gödel (McCarthy 1994, p. 427).

Più di recente, Calude e Thompson, hanno scritto che, sebbene non sia possibile formalizzare tutta la matematica, «è essenzialmente possibile formalizzare tutta la matematica che “ciascuno usa”». La teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel combinata con la logica del primo ordine fornisce un formalismo soddisfacente e generalmente accettato per essenzialmente tutta la matematica corrente» (Calude, Thompson 2016, p. 139). Per questi autori, se è vero che non si può «dimostrare la completezza di sistemi tanto potenti quanto la aritmetica di Peano», è nondimeno possibile «dimostrare la completezza di molti sistemi, più deboli ma interessanti, come, ad esempio, la logica del primo ordine» (*ibidem*). La prospettiva hilbertiana non andrebbe, quindi, abbandonata, bensì ridimensionata.

Ma questo approccio trascura il fatto che Hilbert non ricercava la formalizzazione come un fine in sé stesso. Il suo scopo principale era fornire una fondazione sicura alla matematica attraverso la formalizzazione e la dimostrazione della coerenza di una sua parte, quella ritenuta meno dubbia, ovvero l'aritmetica, da cui, almeno in linea di principio, sarebbe stato poi possibile derivare tutte le verità matematiche. E questo scopo non può essere raggiunto a causa dei risultati di Gödel (von Plato 2018). Che una qualche porzione della matematica possa essere formalizzata, ma non se ne possa dimostrare la coerenza, o che si possa dimostrare la completezza di una qualche altra limitata porzione della matematica, non significa affatto che lo scopo principale di Hilbert possa essere raggiunto sia pure in una forma più circoscritta. Secondo Weyl, ad esempio, la rilevanza dei risultati di Gödel non può essere sovrastimata, perché a causa di tali risultati «la fondazione ultima e il significato ultimo della matematica rimane un problema aperto», e il mancato successo «dell'audace impresa hilbertiana non può non influenzare l'interpretazione filosofica» della matematica (Weyl 1949, p. 219).

Alcuni autori, poi, ritengono che la concezione assiomatica della matematica non rifletta adeguatamente l'attività dei matematici e che fare matematica significhi principalmente cercare di formulare ipotesi che siano in grado di risolvere un dato problema matematico a partire da ciò che è noto del problema piuttosto che dimostrare teoremi a partire da assiomi (Hersh 1997; Cellucci 2013; 2017; 2022).

2. Concezione assiomatica della matematica e automazione del ragionamento

A fronte delle critiche della concezione assiomatica che provengono da concezioni radicalmente diverse della matematica, e nonostante

alcuni risultati della logica matematica, come quelli di Gödel, rendano irraggiungibile lo scopo che Hilbert assegnava alla formalizzazione della matematica, secondo i sostenitori della concezione assiomatica della matematica vi sono degli altri risultati della logica matematica, come l'isomorfismo di Curry-Howard, che sembrano supportare la bontà della concezione assiomatica e giustificare il perseguimento delle ricerche ispirate da tale concezione, prime fra tutte quelle legate allo sviluppo dell'automazione del ragionamento (*automated reasoning*). In tale ambito di ricerca è particolarmente evidente la consonanza con la concezione assiomatica della matematica. Portoraro, ad esempio, scrive che «il ragionamento automatizzato è simile alla dimostrazione meccanica di teoremi. Costruire un programma di ragionamento automatizzato significa fornire una descrizione algoritmica a un calcolo formale in modo che possa essere implementato su un computer per dimostrare teoremi del calcolo in modo efficiente» (Portoraro 2025).

Le prospettive legate alle ricerche relative all'automazione del ragionamento hanno dato nuova linfa alla concezione assiomatica della matematica e al principale prodotto teorico di tale concezione, ovvero alla teoria della dimostrazione (von Plato 2018, sez. 8). Scopo di questo articolo è, mettendo da parte le critiche mosse alla concezione assiomatica a partire da concezioni radicalmente diverse, analizzare se davvero risultati come quello di Curry-Howard e le ricerche sull'automazione del ragionamento forniscano una solida giustificazione per continuare a sostenere l'adequatezza della concezione assiomatica della matematica.

L'isomorfismo di Curry-Howard mostra come i programmi che vengono studiati in informatica teorica dagli informatici possano essere ritenuti equivalenti alle dimostrazioni che vengono studiate dai logici matematici nella teoria della dimostrazione (Sørensen, Urzyczyn 2006, p. v; Prawitz 2008), ovvero alle dimostrazioni costruttive, tipiche della concezione intuizionista, in cui quando si afferma che p significa che si è in grado di fornire una dimostrazione che p ed estrarre da questa dimostrazione un algoritmo per costruire p ogni volta che si asserisce che p (Moschovakis 2018). Ora, da un lato, è possibile, attraverso le tecniche sviluppate da Gödel e da Turing, "tradurre" lo studio delle proprietà delle dimostrazioni formali nello studio delle proprietà delle funzioni ricorsive, ovvero computabili. Dall'altro lato, il lambda calcolo è stato ideato e sviluppato da Church e da Curry negli anni Trenta del Novecento proprio per studiare le funzioni ricorsive, e dunque la computabilità, e per contribuire alla ricerca sui fondamenti della matematica. In seguito, prima Curry e poi Howard hanno messo in luce la corrispondenza che sussiste tra le dimostrazioni formulate nei sistemi intuizionistici di deduzione naturale e i programmi elaborati nel lambda calcolo tipato semplice, che era ormai

divenuto centrale in informatica teorica². In altre parole, Curry e Howard dimostrano che vi è un isomorfismo tra i sistemi di deduzione naturale, che furono concepiti come modelli delle dimostrazioni utilizzate dai matematici, e il lambda calcolo tipato semplice, che venne concepito come modello della calcolabilità.

L'isomorfismo di Curry-Howard sembra supportare la concezione assiomatica della matematica, perché la corrispondenza tra dimostrazioni e programmi sembra confermare la tesi che ampliare la conoscenza matematica significhi produrre dimostrazioni in un dato sistema formale, e che, quindi, il metodo della matematica sia effettivamente il metodo assiomatico (Weir, 2021, sez. 7). In questa prospettiva, fare matematica non significa altro che dedurre conclusioni da premesse date in un dato sistema formale. Grazie all'isomorfismo di Curry-Howard, dedurre conclusioni in un sistema formale si dimostra essere equivalente all'esecuzione di un programma, e dunque sembra essere un'attività meccanizzabile, dato che i programmi sono algoritmi e sono dunque meccanizzabili. Se la concezione assiomatica è corretta, produrre conoscenza matematica significa produrre dimostrazioni formali, ovvero dimostrazioni all'interno di un dato sistema formale, e se tale attività può essere meccanizzata, significa che la produzione di conoscenza matematica può essere resa del tutto indipendente dal soggetto epistemico umano.

L'idea che il ragionamento logico, inteso esclusivamente come ragionamento deduttivo, possa essere formalizzato efficacemente attraverso la logica matematica ha suggerito a molti autori che vi fosse una sorta di equivalenza tra la deduzione e la computazione. La formalizzazione si ritiene, infatti, ci consente di tralasciare ogni aspetto semantico nell'analisi delle inferenze, di rendere la derivazione di una conclusione da delle premesse per mezzo di una regola di inferenza deduttiva una mera manipolazione simbolica, un processo meramente sintattico del tutto analogo a ciò che avviene quando si seguono delle regole computazionali per effettuare un calcolo in ambito matematico (Dutilh Novaes 2012). Per questo la deduzione è stata considerata strettamente affine alla computazione. Secondo alcuni autori, la computazione può essere considerata una forma particolare di deduzione. Ad esempio, Kripke scrive che «la computazione è un argomento deduttivo da un numero finito di istruzioni», ovvero «una forma speciale di argomento matematico» in cui «viene

² Per una presentazione dell'isomorfismo di Curry-Howard e per una breve ricostruzione storica di come Curry e Howard siano giunti a tale risultato, si veda Wadler 2015. Curry scrisse per la prima volta della relazione tra tipi di una funzione calcolabile e proposizioni logiche dimostrabili in Curry 1934. In successivi lavori dimostrò che la relazione si estendeva pure a termini e dimostrazioni. Nel 1969 Howard fece circolare un lavoro, che venne pubblicato solo diversi anni dopo (Howard 1980), nel quale mostrava che la relazione individuata da Curry sussisteva tra i sistemi di deduzione naturale e il lambda calcolo tipato semplice.

fornito un insieme di istruzioni» e in cui si pensa che i diversi «passi nella computazione seguano – seguano deduttivamente – dalle istruzioni» che sono state fornite. Dunque, «una computazione è solo un'altra deduzione matematica, sebbene sia una deduzione matematica di una forma molto specializzata (Kripke 2013, p. 80).

3. L'equiparazione di computazione e deduzione

Ora, anche volendo concedere che l'essere equivalenti alle dimostrazioni in un sistema formale dei programmi informatici, che sono algoritmi, e sono dunque computabili, ovvero sono associati a una funzione computabile, mostri come ogni dimostrazione in un sistema formale possa essere considerata equivalente a una funzione computabile, bisogna però ricordare che non può affermarsi in generale l'inverso, ovvero che ogni funzione computabile corrisponda a una dimostrazione in un sistema formale, dato che, per ogni sistema formale dato, vi sono funzioni computabili che non sono isomorfe ad alcuna dimostrazione in tale sistema formale.

Infatti, se è vero che ogni funzione totale dimostrabilmente computabile f è in effetti computabile, è anche vero che non ogni funzione totale f , sebbene sia computabile, è dimostrabilmente computabile in un dato sistema formale F . Una funzione totale f si dice dimostrabilmente computabile se è possibile dimostrare in un sistema formale F che f è computabile. Dimostrare che una funzione totale f è computabile significa dimostrare che esiste una macchina di Turing, M_f , che computa f e che esiste una dimostrazione nel sistema formale F che f è totale, ovvero che M_f è totale. Una macchina di Turing M è totale se per ogni $n \in \mathbb{N}$ che le viene fornito come input, M si arresta sempre.

Che non ogni funzione totale f , sebbene sia computabile, è dimostrabilmente computabile in un dato sistema formale F si deriva attraverso un argomento diagonale come quello usato da Turing (1937) per dimostrare che il problema della fermata non è decidibile. Il punto è che l'insieme Φ delle funzioni totali computabili è più che numerabile, mentre ogni sistema formale F che consenta di dimostrare in un numero finito di passi la computabilità di una data funzione totale computabile $f \in \Phi$ non può che essere costituito da un insieme finito di elementi e produrre, quindi, al più un insieme numerabile di dimostrazioni, D_{fi} . Per cui, se enumeriamo tutte le funzioni totali f_i dimostrabilmente computabili nel sistema F , ovvero tutte le funzioni $f_i \in \Phi$ la cui dimostrazione di computabilità $d_{fi} \in D_{fi}$, e otteniamo così l'insieme Φ_{DC} e se F è coerente, allora è sempre possibile, in un sistema formale diverso da F , diciamo G , identificare, attraverso la tecnica della diagonalizzazione, una macchina di Turing che si riferisce a una

funzione $f_n \in \Phi$ che non è compresa nell'insieme Φ_{DC} , ovvero nell'insieme di tutte le funzioni totali dimostrabilmente computabili nel sistema F .

Possiamo, infatti, immaginare una macchina di Turing M_{f_n} che corrisponda alla funzione diagonale relativa all'insieme di funzioni $f_i \in \Phi_{DC}$, ovvero una macchina di Turing che enumeri tutte le dimostrazioni $d_{f_i} \in D_{f_i}$, ovvero le corrispondenti macchine di Turing M_{f_i} che computano tali funzioni secondo le dimostrazioni $d_{f_i} \in D_{f_i}$, e che per ogni input n computi la funzione $f_n(n)$, ovvero applichi a n la funzione corrispondente alla ennesima dimostrazione di questa enumerazione, funzione che sappiamo essere computabile proprio grazie alla ennesima dimostrazione di questa enumerazione, ovvero al fatto che si è dimostrato in F che la macchina di Turing che la computa è totale, ovvero si arresta per ogni input n , e restituisca poi come output un valore opposto a quello restituito dalla ennesima macchina di Turing considerata per calcolare $f_n(n)$. Se, ad esempio, la ennesima macchina di Turing dell'enumerazione di tutte le funzioni totali dimostrabilmente computabili nel sistema F restituisce come output "1", perché si arresta per l'input n , M_{f_n} restituirà come output "0". E così sarà per ogni altra macchina di Turing M_{f_i} di tale enumerazione, dato che si dimostra in F che tali macchine di Turing sono tutte totali, e dunque tutte si arrestano per ogni n . In altre parole, per ogni valore di n sappiamo che vi è una macchina di Turing che si arresta quando computa la funzione corrispondente alla ennesima dimostrazione di questa enumerazione. La nostra macchina di Turing M_{f_n} , per computare $f_n(n)$, quindi, non farà altro che, per ogni n , attivare la macchina di Turing che computa la funzione corrispondente alla ennesima dimostrazione di tale enumerazione. Eppure, non è possibile dimostrare in F che la macchina di Turing M_{f_n} è totale, ovvero si arresta per ogni n , ovvero che la funzione diagonale che corrisponde alla macchina di Turing M_{f_n} è computabile in F , e quindi possiamo concludere che tale funzione non appartiene a Φ_{DC} . Infatti, per ogni n , i valori restituiti come output dalla macchina di Turing M_{f_n} sono opposti a quelli della diagonale di una matrice costituita da ogni possibile input n e da tutte le dimostrazioni $d_{f_i} \in D_{f_i}$, ovvero da tutte le corrispondenti macchine di Turing M_{f_i} che computano tutte le funzioni $f_i \in \Phi_{DC}$. Non vi è, pertanto, in tale matrice nessuna macchina di Turing che restituisca gli stessi valori di output che restituisce M_{f_n} , i valori restituiti da ognuna di queste differiscono da quelli restituiti da M_{f_n} per il valore ennesimo, e quindi la funzione che corrisponde alla macchina di Turing M_{f_n} non appartiene a Φ_{DC} . Dunque, la funzione corrispondente alla macchina di Turing M_{f_n} non ha una dimostrazione d_{f_n} della propria computabilità in D_{f_n} ma, nonostante ciò, sappiamo che è computabile, per così dire, per costruzione, dato che per ogni n sappiamo che vi è una macchina di Turing che si arresta quando viene computata $f_n(n)$. Dunque, se F è coerente, abbiamo la garanzia che, per ogni input n , la funzione $f_n(n)$ è

computabile, ma non possiamo dimostrarlo in F (Boolos, Burgess, Jeffrey 2002). Tale procedura può ripetersi per ogni sistema formale. Dunque, per ogni sistema formale non tutte le funzioni totali, benché computabili, sono dimostrabilmente computabili in tale sistema. E dunque, non ogni funzione computabile corrisponde a una dimostrazione in senso intuizionista. La sovrapponibilità tra computazione e deduzione non è, quindi, affatto assoluta.

4. Concezione assiomatica della matematica e dimostrazioni formali

Fatta questa precisazione, assumiamo, per amore di discussione, che la concezione assiomatica sia corretta, e che fare matematica significhi produrre dimostrazioni di teoremi in un dato sistema formale a partire da assiomi dati. Conseguenza diretta dell'idea che la conoscenza matematica sia ampliata attraverso la dimostrazione di teoremi in un sistema formale è la tesi secondo cui tale attività può essere meccanizzata, e che quindi la conoscenza matematica può essere ampliata indipendentemente dall'attività epistemica del soggetto umano. E difatti tale tesi è stata difesa da coloro che ritengono che vi siano programmi in grado di produrre autonomamente matematica (Colton, Bundy, Walsh 1999; Colton 2002; Larson 2005; Hales 2008; Portoraro 2025).

Bisogna procedere a un'analisi attenta per mettere in luce come l'associazione tra l'idea che la matematica consista nella dimostrazione di teoremi in un dato sistema formale e l'idea che la matematica possa essere automatizzata sia più problematica di quanto possa apparire a un'ispezione veloce.

Per potere affermare che risultati come l'isomorfismo di Curry-Howard sostengono la bontà della concezione assiomatica della matematica, non basta infatti sostenere genericamente che fare matematica significhi dimostrare teoremi, bisogna impegnarsi a sostenere che fare matematica significhi produrre dimostrazioni in un dato sistema formale, ovvero produrre dimostrazioni formali. Chi intende percorrere questa linea argomentativa a favore della concezione assiomatica della matematica deve, quindi, impegnarsi a difendere la seguente tesi relativa alla formalità delle dimostrazioni matematiche:

- (T_f) tutte le dimostrazioni matematiche prodotte dai matematici possono essere, almeno in linea di principio, ridotte a dimostrazioni formali, ovvero a dimostrazioni che possono essere autonomamente verificate da programmi informatici e che sono dello stesso tipo delle dimostrazioni che potrebbero essere autonomamente prodotte da programmi informatici.

Bisogna a questo punto verificare se T_f può essere adeguatamente difesa.

La tesi secondo cui tutte le dimostrazioni matematiche prodotte dai matematici possono essere, almeno in linea di principio, ridotte a dimostrazioni formali è equivalente a quella che viene definita in filosofia della matematica la concezione derivazionista delle dimostrazioni matematiche, secondo la quale le dimostrazioni matematiche sono accettate dai matematici quando tali dimostrazioni sono in grado di mostrare che sarebbe possibile, almeno in linea di principio, tradurle in un linguaggio formale, ovvero che sarebbe possibile derivare il teorema che dimostrano all'interno di un dato sistema formale, che sarebbe possibile, in altre parole, renderle delle dimostrazioni formali (Azzouni 2004; Antonutti Marfori 2010). La stragrande maggioranza delle dimostrazioni matematiche prodotte dai matematici, infatti, sono dette dimostrazioni informali, proprio perché non sono presentate in modo rigorosamente formalizzato.

Nella concezione derivazionista delle dimostrazioni matematiche, ogni dimostrazione matematica può essere ridotta a una dimostrazione formale, e il rigore della matematica e la certezza della conoscenza matematica sono garantiti da tale possibilità. Ad esempio, Mac Lane scrive che una dimostrazione matematica «è rigorosa quando è (o potrebbe essere) scritta nel linguaggio del primo ordine $L(\in)$ come una sequenza di inferenze dagli assiomi di ZFC, in cui ogni inferenza sia fatta in accordo con una delle regole stabilite» (Mac Lane 1986, p. 377).

Dunque, se la matematica è dimostrazione di teoremi in un dato sistema formale, ogni dimostrazione matematica può essere resa una dimostrazione formale, e se ogni dimostrazione matematica è una dimostrazione formale, allora la produzione di matematica può essere meccanizzata. In effetti, affinché «le macchine possano fare matematica ciò che è necessario è prima di tutto un linguaggio che descriva la matematica in termini che siano adeguati alle macchine. Tale linguaggio deve essere completamente *formalizzato*» (Longo 2003, p. 85). Come scrivono Davis e Hersh, la formalizzazione «è il processo attraverso cui la matematica viene resa adatta al processamento automatico» (Davis, Hersh 1981, p. 136). La formalizzazione è il processo attraverso cui un linguaggio viene “desemantizzato” per consentirne una manipolabilità esclusivamente sintattica (Dutilh Novaes 2012).

Chi voglia difendere la concezione assiomatica sulla base di risultati come quello di Curry-Howard si impegna, perciò, non solo a sostenere che la matematica sia dimostrazione di teoremi, ma anche a difendere T_f , ovvero la concezione derivazionista delle dimostrazioni matematiche. Passeremo in rassegna, pertanto, alcune delle principali difficoltà relative alla concezione derivazionista.

5. Dimostrazioni matematiche formali e informali

Il primo problema della concezione derivazionista delle dimostrazioni matematiche deriva dal fatto che contro tale tesi si può obiettare che le dimostrazioni matematiche prodotte effettivamente dai matematici non solo non sono affatto dimostrazioni formali, in quanto sono piuttosto dimostrazioni informali, ma anche che non sia affatto scontato che sia sempre possibile tradurre integralmente tali dimostrazioni informali in un linguaggio formale dato (Rav 2007; Pelc 2009; Goethe, Friend 2010; Tanswell 2015; Larvor 2016; Macbeth 2024). Le dimostrazioni matematiche che vengono effettivamente prodotte dai matematici nella maggior parte degli ambiti della matematica non sono, infatti, delle dimostrazioni formali, ovvero non sono affatto lo stesso tipo di oggetti che sono studiati da quei logici matematici che studiano la teoria della dimostrazione, e difatti vengono chiamate, come detto, dimostrazioni informali, oppure schizzi di dimostrazione (Larvor 2016; Goethe, Friend 2010; Antonutti Marfori 2010).

Le dimostrazioni informali non sono date in alcun linguaggio formale, né rendono esplicito ogni passaggio logico. Piuttosto, le dimostrazioni informali fanno assunzioni circa la conoscenza pregressa «della platea cui si rivolgono e la capacità di questa di seguire certe linee argomentative, saltano i passaggi noiosi o di routine, e fanno riferimento a proprietà semantiche e a proprietà di oggetti matematici senza darne una formulazione completa» (Tanswell 2015, pp. 295-297). Nelle dimostrazioni informali viene usato il simbolismo matematico, così come «il linguaggio naturale, i diagrammi, e spiegazioni dalla modalità mista» (*ibidem*).

Dunque, sebbene, come abbiamo visto, per l'isomorfismo di Curry-Howard, i programmi studiati dagli informatici teorici possono essere considerati equivalenti alle dimostrazioni formali studiate dai logici matematici che studiano la teoria della dimostrazione, ciò non significa che quando un matematico presenta una dimostrazione matematica di un risultato cui è pervenuto stia presentando lo stesso tipo di oggetto che studiano i logici matematici in teoria della dimostrazione o che un programma che sia stato disegnato per derivare deduttivamente teoremi da un insieme di assiomi dati sarebbe in grado di produrre tale risultato.

In altre parole, le dimostrazioni matematiche che i difensori di una prospettiva assiomatica sostengono i programmi informatici siano in grado di produrre autonomamente, ovvero indipendentemente da ogni soggetto epistemico umano, non sono equivalenti alle dimostrazioni matematiche prodotte e ritenute interessanti dai matematici umani (Macbeth 2014; Pantsar 2024). La ragione è che una dimostrazione matematica interessante, anche quando presentata in un contesto rigoroso, come ad esempio in una pubblicazione scientifica, non si risolve mai esclusiva-

mente in una mera sequenza di deduzioni da un insieme di assiomi dati al teorema da dimostrare. Una dimostrazione matematica interessante non convince il pubblico cui è rivolta per il fatto che questo è in grado di seguire diligentemente ogni singola deduzione, ma piuttosto viene ritenuta interessante perché, nel suo svolgersi, oltre a determinate inferenze deduttive, implica anche, da parte del pubblico cui è rivolta, la valutazione di argomenti e ragioni forniti a sostegno o contro determinate affermazioni, implica che il pubblico cui si rivolge comprenda, e giudichi adeguata, la strategia argomentativa complessiva della dimostrazione, che ne colga magari le analogie con dimostrazioni simili precedenti (Larvor 2012; Aberdein 2007), implica che il pubblico cui si rivolge colga i nessi di quanto si viene dimostrando in un dato ambito matematico con ambiti matematici diversi, e possa instaurare così connessioni euristica-mente feconde. Una dimostrazione matematica informale viene ritenuta interessante, dunque, perché, sebbene consista nella dimostrazione di un teorema a partire da certi principi matematici e si collochi nel solco della tradizione assiomatica³, è in grado di innescare anche tutta una serie di inferenze non deduttive e di valutazioni connesse, come i giudizi in merito alla plausibilità di un'ipotesi o di una strategia argomentativa, che non sono meccanizzabili, in quanto sono basati su criteri epistemic non matematici e non formalizzabili, come la plausibilità (Cellucci 2022). Una dimostrazione matematica del genere non è, quindi, formalizzabile nello stesso senso in cui lo è un programma informatico, ovvero lo è una dimostrazione formale, nel senso che non è possibile tradurre integralmente una dimostrazione matematica informale in un linguaggio formale senza che alcuni di quegli aspetti che la rendono una dimostrazione matematica interessante vadano persi (Goethe, Friend 2010).

Molti degli aspetti che rendono interessante e feconda una dimostrazione informale, infatti, non possono essere resi sul piano esclusivamente sintattico. Quando si ha a che fare con una dimostrazione matematica informale non si ha davvero a che fare con la mera manipolazione sintattica di segni privi di significato, come nel caso di una dimostrazione integralmente formalizzata, ma sono piuttosto coinvolti nello sviluppo della dimostrazione in modo essenziale degli aspetti semantici che riguardano gli oggetti matematici coinvolti e le loro proprietà. Quando si lavora con le dimostrazioni formali, come di norma fanno gli studiosi di teoria della

³ Le dimostrazioni assiomatiche possono essere esplicative o non esplicative (cfr. Cellucci 2022, cap. 14), a seconda che mostrino o meno la ragione della conclusione che viene dimostrata, dato che in una dimostrazione assiomatica una data conclusione può essere dimostrata anche a partire da principi matematici che non sono la vera ragione di quella conclusione. Possiamo approssimativamente considerare, sulla base di tale distinzione, le dimostrazioni matematiche (informali) interessanti cui facciamo qui riferimento, come delle dimostrazioni assiomatiche (informali) esplicative.

dimostrazione, invece, l'elemento cruciale diviene proprio la formalizzazione, e dunque la manipolazione sintattica secondo certe regole di certi segni privati di ogni aspetto semantico. Il punto è che i matematici, di norma, non costruiscono le loro dimostrazioni senza alcuna considerazione del significato matematico e delle implicazioni dei teoremi che intendono dimostrare (Macbeth 2024; Cellucci 2017; Friend 2014; Larvor 2012; Rav 2007).

Che le dimostrazioni matematiche informali e le dimostrazioni formali non possano essere considerate come del tutto equivalenti si evince anche dal fatto che i loro obiettivi sono divergenti. In una dimostrazione formale si è interessati a dimostrare che una certa formula, una certa stringa di segni, formata e manipolata secondo certe regole, e che può essere *eventualmente* interpretata come esprime una certa asserzione matematica, può essere derivata in un dato sistema formale in un numero finito di passi. Di contro, nei contesti matematici al di fuori della teoria della dimostrazione, l'obiettivo di una dimostrazione informale è mostrare che un certo risultato debba essere accettato perché può essere ricondotto ad altri risultati matematici che sono già stati ritenuti accettabili dalla comunità dei matematici. I matematici che elaborano una dimostrazione informale sviluppano i loro argomenti, attraverso cui veicolano le loro tesi e le loro idee matematiche a sostegno del risultato che intendono dimostrare, facendo riferimento alle caratteristiche matematiche degli oggetti di cui trattano per convincere i loro colleghi e usano il simbolismo matematico e una sorta di formalizzazione incompleta di certi aspetti delle loro dimostrazioni per rendere più preciso, non ambiguo e rigoroso il loro argomentare.

Dunque, l'obiettivo di un matematico che presenta una certa dimostrazione informale D_{inf} per persuadere i propri colleghi che un certo risultato P debba essere accettato, non è lo stesso obiettivo del matematico che intenda dimostrare che un certo risultato P , che magari è già accettato perché per P esiste una certa dimostrazione informale D_{inf} , è derivabile in modo completamente formalizzato all'interno di un dato sistema formale F , ovvero che intenda produrre una dimostrazione formale D_{form} di P . Non solo gli scopi epistemici di D_{inf} e D_{form} differiscono, quindi, ma sono diverse anche le loro potenzialità euristiche.

Le dimostrazioni formali, per perseguire il proprio obiettivo primario, scompongono e strutturano una dimostrazione matematica in un modo che è tale da ostacolare la comprensione del portato matematico del risultato che viene dimostrato e delle sue implicazioni, e quindi possiedono un basso potere euristico ed esplicativo (Macbeth 2015; Robinson 1997). Ma la comprensione dei risultati matematici ottenuti e delle loro implicazioni è cruciale in vista dell'ampliamento della conoscenza matematica, ovvero della formulazione di nuove ipotesi matematiche. Ciò significa

che le dimostrazioni formali non sono in grado di contribuire in maniera significativa all'ampliamento della conoscenza matematica. Ciò relega la ricerca di dimostrazioni formali di risultati matematici già accettati dalla comunità matematica ad ambiti che, sebbene siano certamente legittimi e degni di essere indagati, sono diversi da quello della produzione di *nuova* conoscenza matematica. Un esempio di tali ambiti è la creazione e l'ampliamento di un vasto archivio di dimostrazioni formali di risultati matematici rilevanti (si veda, ad esempio, Anonymous 1994).

È forse importante sottolineare ancora una volta che una dimostrazione formale D_{form} e una dimostrazione informale D_{inf} , anche di uno stesso risultato P , non sono oggetti dello stesso tipo: una dimostrazione matematica formale è a sua volta un oggetto matematico, che può quindi essere manipolato secondo regole matematiche e valutato secondo criteri matematici; al contrario, una dimostrazione matematica informale non è a sua volta un oggetto matematico, è piuttosto un'argomentazione, che, sebbene presenti un esteso ricorso al simbolismo matematico che non si riscontra nelle argomentazioni non matematiche, consta, come qualsiasi altra argomentazione, di una concatenazione di argomenti volti a fare accettare una data asserzione. Ciò implica che i criteri sulla base dei quali una dimostrazione formale può essere valutata non sono gli stessi sulla base dei quali può essere valutata una dimostrazione informale. Infatti, per valutare una dimostrazione formale si possono utilizzare dei criteri formali. Dato che i criteri formali sono formali, appunto, è possibile ritenere, in prima approssimazione, che la valutazione del soddisfacimento di tali criteri possa essere meccanizzata. Di contro, non tutti i criteri attraverso cui viene valutata una dimostrazione informale sono formali, né possono essere formalizzati, dato che, come detto, non sono indipendenti dagli aspetti semantici e perciò non tollerano quel processo di desementizzazione propedeutico alla formalizzazione. Dunque, la valutazione del soddisfacimento di tali criteri non può essere meccanizzata. Come scrive Larvor, «la validità o invalidità degli [...] argomenti informali non dipende esclusivamente dalla loro forma logica, ma anche dal loro contenuto – sono *dipendenti dal contenuto*» (Larvor 2012, p. 720). È questa loro dipendenza dal contenuto semantico che rende impossibile tradurre in un linguaggio formale una dimostrazione matematica informale senza che qualcosa vada perso (Goethe, Friend 2010). Ed è sempre la dipendenza dal contenuto semantico delle dimostrazioni informali la ragione per cui non è affatto scontato che *ogni* dimostrazione matematica possa essere ridotta a una dimostrazione formale. Il rischio è che nel processo di traduzione vengano persi degli elementi della dimostrazione informale che costituivano le ragioni principali per le quali la conclusione dell'argomentazione avrebbe dovuto essere accettata (Larvor 2012; Lakatos 1976).

6. Concezione derivazionista delle dimostrazioni e regresso infinito

Un'altra rilevante difficoltà che affligge la concezione derivazionista delle dimostrazioni matematiche è la seguente. Se, secondo la concezione derivazionista, il rigore della matematica è garantito dal fatto che ogni dimostrazione matematica può, almeno in linea di principio, essere tradotta in una dimostrazione formale, allora l'informazione relativa a come tale traduzione possa essere realizzata dovrebbe essere veicolata dalla dimostrazione matematica informale stessa, altrimenti vi sarebbe il rischio di un regresso infinito. Vediamo perché. Si consideri la dimostrazione informale D_{inf} del teorema T . Non può certo semplicemente assumersi che D_{inf} sia traducibile in una dimostrazione formale, è necessario fornire delle indicazioni, anche in forma schematica, in merito a come tale traduzione, almeno in linea di principio, possa essere condotta. Ora, se l'informazione relativa a come tradurre D_{inf} nella dimostrazione formale di T , D_{form} , non è veicolata dalla stessa D_{inf} , allora un'altra dimostrazione, D_{inf}^* , che dimostri come possa tradursi D_{inf} in D_{form} , dovrebbe essere fornita per poter sostenere che T sia stato davvero dimostrato in modo rigoroso in base alla concezione derivazionista. Dunque, in questo caso sarebbe più corretto dire che la vera dimostrazione di T è data dalla congiunzione di D_{inf} e D_{inf}^* , ovvero da $[D_{inf} + D_{inf}^*]$, piuttosto che dalla sola D_{inf} . Se consideriamo ora D_{inf}^* , abbiamo, di nuovo, due possibilità: o D_{inf}^* veicola essa stessa l'informazione relativa a come tradurla nella dimostrazione formale D_{form}^* , oppure non veicola essa stessa tale informazione. Se D_{inf}^* veicola l'informazione relativa a come possa essere tradotta in D_{form}^* , allora si può sostenere che, in effetti, l'informazione relativa a come tradurre una dimostrazione matematica informale di T in una dimostrazione matematica formale di T è veicolata dalla dimostrazione matematica informale di T stessa, dato che, come detto, D_{inf}^* può essere considerata una parte della dimostrazione informale $[D_{inf} + D_{inf}^*]$ di T , e precisamente quella parte che consente di tradurre la dimostrazione informale di T $[D_{inf} + D_{inf}^*]$ nella dimostrazione formale di T $[D_{form} + D_{form}^*]$. Se, invece, D_{inf}^* non veicola essa stessa l'informazione relativa a come possa essere tradotta in D_{form}^* , allora un'altra dimostrazione, D_{inf}^{**} , di come sia possibile tradurre D_{inf}^* in D_{form}^* dovrà essere fornita per poter sostenere che T sia stato davvero dimostrato in modo rigoroso in base alla concezione derivazionista. Dovremmo a questo punto considerare che la vera dimostrazione di T sia $[D_{inf} + D_{inf}^* + D_{inf}^{**}]$ e non solamente $[D_{inf} + D_{inf}^*]$. E così via. Vi è qui una sorta di dilemma: se si accetta la concezione derivazionista delle dimostrazioni matematiche, o le dimostrazioni informali contengono l'informazione relativa a come possano essere tradotte in delle dimostrazioni formali, oppure ci si trova intrappolati in un regresso infinito.

Questo argomento spiega perché la stragrande maggioranza di coloro

che difendono la concezione derivazionista delle dimostrazioni matematiche ritenga che l'informazione relativa a come una dimostrazione informale possa essere tradotta in una dimostrazione formale debba essere veicolata dalla dimostrazione informale stessa. In altri termini, di norma coloro che difendono la concezione derivazionista delle dimostrazioni matematiche adottano una qualche variante di quella concezione delle dimostrazioni matematiche che considera le dimostrazioni matematiche informali come delle "ricette" per poter produrre delle dimostrazioni formali, ovvero come degli schizzi, degli abbozzi, di dimostrazioni formali.

Il problema ora è il seguente: come si deve interpretare l'affermazione secondo cui l'informazione relativa a come sia possibile tradurre una dimostrazione matematica informale in una dimostrazione matematica formale è veicolata dalla dimostrazione matematica informale stessa? Secondo Larvor, la concezione che considera le dimostrazioni informali come delle ricette per produrre dimostrazioni formali sostiene che una data dimostrazione informale D_{inf} di un dato teorema T , che è un'asserzione matematica, non sia altro che un argomento volto a sostenere che esiste una dimostrazione formale adeguata di T , ovvero D_{form} . Dato che l'asserzione " D_{form} esiste e può essere derivata da D_{inf} " è un'asserzione matematica a sua volta, indichiamola con T^* , «per evitare un regresso è necessario un qualche altro resoconto di come la dimostrazione [informale D_{inf} che dimostra T] possa dimostrare [T^*]» (Larvor 2016, p. 403). In altre parole, per evitare un regresso infinito, se difendiamo la tesi che D_{inf} sia in grado di dimostrare T sulla base della concezione secondo cui le dimostrazioni informali sono delle ricette per formulare dimostrazioni formali, non possiamo rendere conto di come D_{inf} sia in grado di dimostrare T^* nello stesso modo, altrimenti ci troveremmo in una situazione come quella illustrata sopra, in cui è necessaria sempre un'ulteriore dimostrazione per potere affermare che un dato risultato sia stato davvero dimostrato. Ma questo conduce a una situazione in un certo senso paradossale: affinché sia possibile evitare un regresso infinito, la concezione che vede le dimostrazioni matematiche informali come delle ricette per produrre dimostrazioni matematiche formali sembrerebbe richiedere che una stessa dimostrazione matematica informale (ad esempio, D_{inf}) possa essere considerata al tempo stesso 1) una ricetta per poter produrre una dimostrazione matematica formale (ad esempio, D_{form}) di un dato risultato (ad esempio, T) e 2) una dimostrazione matematica formale (indichiamola con D_{formT^*}) di un altro risultato (ad esempio, T^* , che afferma che " D_{form} esiste e può essere derivata da D_{inf} "). Avremmo, quindi, che la nostra dimostrazione è al tempo stesso D_{inf} e D_{formT^*} . Ora, è effettivamente difficile anche solo riuscire a immaginare come possa una dimostrazione informale di T essere al contempo una dimostrazione formale di T^* . Come può una dimostrazione che non è formulata in alcun linguaggio formale

essere al contempo una dimostrazione formale adeguata? La concezione delle dimostrazioni informali come delle ricette per produrre dimostrazioni formali sembra dunque inadeguata a mettere al riparo coloro che sostengono la concezione derivazionista delle dimostrazioni matematiche dal rischio che la loro concezione conduca a un regresso infinito.

7. Dimostrazioni formali e meccanizzabilità

Abbiamo messo in luce, nel par. 6, il problema di elaborare una formulazione rigorosa e adeguata della concezione derivazionista delle dimostrazioni matematiche. Abbiamo, inoltre, nel par. 5, messo in luce la difficoltà di sostenere la concezione derivazionista, fornendo ragioni a sostegno della tesi che non sia possibile tradurre davvero ogni dimostrazione matematica informale in una dimostrazione formale del tutto equivalente, perché gli elementi delle dimostrazioni informali connessi agli aspetti semantici andrebbero persi in tale processo di traduzione. Ci siamo concentrati sulla concezione derivazionista perché, per difendere la concezione assiomatica della matematica, i sostenitori di tale concezione fanno riferimento ad alcuni risultati della logica matematica, come l'isomorfismo di Curry-Howard. Come già sottolineato, se adottano tale linea, i sostenitori della concezione assiomatica della matematica non possono limitarsi a concepire genericamente la matematica come dimostrazione di teoremi, ma devono impegnarsi a difendere la concezione derivazionista delle dimostrazioni matematiche.

Ora, il sostenitore della concezione assiomatica della matematica potrebbe sostenere che, nonostante la concezione delle dimostrazioni informali di norma sostenuta dai derivazionisti sia inadeguata, e nonostante le dimostrazioni formali non siano in grado di far progredire la conoscenza matematica perché non facilitano la comprensione matematica, la concezione derivazionista è comunque utile alla difesa della concezione assiomatica, perché per suo tramite si può sostenere l'idea che il rigore e la specificità della conoscenza matematica risposano sul fatto che ogni dimostrazione matematica può essere tradotta, almeno in linea di principio, in una dimostrazione formale e che una dimostrazione formale è epistemicamente superiore a qualunque dimostrazione informale e a qualunque altra forma di giustificazione epistemica possibile, perché proprio per il fatto che una dimostrazione matematica è una dimostrazione formale, e proprio grazie a risultati come l'isomorfismo di Curry-Howard, è possibile, almeno in linea di principio, automatizzare la verifica della correttezza di tale dimostrazione, così da renderla indipendente da qualsiasi soggetto epistemico, cosa che non è possibile fare in nessun ambito della conoscenza umana al di fuori della matematica. Ciò garantirebbe

la peculiare certezza della conoscenza matematica rispetto al resto della conoscenza scientifica e fornirebbe un notevole sostegno alla concezione assiomatica della matematica.

Il problema è che non è davvero possibile difendere in questo modo la concezione assiomatica a causa di un altro risultato della logica matematica, il teorema di Rice (1953). Come abbiamo detto, formalizzare una dimostrazione matematica significa renderla adeguata a essere processata meccanicamente. Ciò si ritiene assicuri il massimo grado di certezza possibile alla conoscenza matematica. L'idea, di ascendenza leibniziana, è infatti che un controllo completamente automatizzato di una determinata dimostrazione possa conferire un grado di giustificazione a tale dimostrazione superiore a quello che potrebbe conferirle un controllo effettuato da un soggetto epistemico umano, o da più soggetti epistemici umani. La ragione è che si ritiene che le macchine siano superiori ai soggetti umani nello svolgere compiti di routine, dato che sono meno soggette degli umani a commettere errori in compiti del genere, e che il controllo della correttezza di una dimostrazione, riguardando solo il rispetto delle regole di manipolazione sintattica delle formule proprie del sistema formale nel quale la dimostrazione è stata elaborata, sia proprio uno di quei compiti di routine in cui le macchine sorpassano le capacità cognitive umane. Il controllo automatizzato consente di escludere dal processo di verifica ogni soggetto umano ed è proprio ciò che conferisce un alto grado di accuratezza a tale processo rispetto a un processo di verifica svolto da matematici umani. La formalizzazione, quindi, non garantisce tanto un elevato grado di giustificazione epistemica a una dimostrazione perché, esplicitando ogni singolo passo della dimostrazione, la rende più facilmente ispezionabile e giudicabile dai matematici umani, quanto perché rende la verifica di tale dimostrazione almeno potenzialmente indipendente da ogni matematico umano.

Il punto è che anche considerando il solo ambito della verifica delle dimostrazioni formali, tralasciando, quindi, ambiti più creativi del lavoro matematico in cui è più dibattuto se le macchine riescano o meno a emulare le capacità umane, non è comunque possibile affermare che sia possibile meccanizzare del tutto il processo di verifica della correttezza delle dimostrazioni formali, e quindi renderlo indipendente da ogni contributo umano in senso assoluto. Kreisel, ad esempio, scrive che il ragionamento matematico «non ci si presenta come l'esecuzione di regole meccaniche [...]. La connessione tra la affidabilità e la possibilità del controllo meccanico è di solito, e un po' acriticamente, data per scontata» (Kreisel 1970, p. 21). Ma la connessione tra l'affidabilità del processo di verifica della correttezza di una dimostrazione e la meccanizzazione di tale processo di verifica non può essere affatto data per scontata.

Per comprendere meglio perché tale connessione non possa darsi per scontata, si consideri che per verificare meccanicamente la correttezza

di una dimostrazione formale data FP_1 si deve sviluppare un programma informatico, CP_1 . Supponiamo che CP_1 verifichi la correttezza di FP_1 . Possiamo ora considerare FP_1 verificata in modo certo e assoluto? Non proprio. Come abbiamo visto, in base all'isomorfismo di Curry-Howard un programma informatico può essere considerato equivalente a una dimostrazione formale. Dunque, prima di potere affermare con certezza che la correttezza di FP_1 è stata verificata si dovrebbe potere dimostrare la correttezza di CP_1 , che possiamo rinominare FP_2 . Se per verificare la correttezza di FP_2 sviluppassimo il programma CP_2 ci staremmo ovviamente imbarcando verso un regresso infinito. E non c'è modo di evitare un tale regresso infinito perché non c'è modo di verificare la correttezza di un programma in generale.

La ragione per cui non è possibile in generale verificare la correttezza di un programma informatico è il teorema di Rice (1953), un risultato della teoria della computabilità che è strettamente connesso al risultato di Turing (1937). Il teorema di Rice, infatti, data la relazione che, come abbiamo visto, sussiste tra programmi, dimostrazioni formali e funzioni calcolabili, dimostra che non vi è alcun algoritmo per decidere in generale questioni non banali riguardanti il comportamento dei programmi informatici, dove una questione è banale se riguarda tutti i programmi informatici o nessuno di essi. La correttezza dei programmi è proprio una delle proprietà non banali che non sono decidibili in generale in base al teorema di Rice (Longo 2003, p. 99; Cellucci 2017, p. 217). Il teorema di Rice può essere formulato come segue:

Teorema di Rice: se S è una proprietà non banale dei linguaggi accettabili dalle macchine di Turing, allora il problema di determinare se un dato linguaggio L accettabile da una data macchina di Turing abbia la proprietà S è un problema indecidibile.

È opportuno ricordare che un linguaggio formale è detto accettabile da una macchina di Turing se è un sottoinsieme ricorsivamente numerabile dell'insieme di tutte le possibili sequenze finite costituite dai simboli che appartengono all'alfabeto Σ di tale linguaggio, ovvero se esiste una macchina di Turing che è in grado di enumerare tutte le formule valide di tale linguaggio. Un linguaggio formale è detto decidibile da una macchina di Turing se esiste una macchina di Turing che quando riceve come input una data sequenza finita di simboli che appartengono all'alfabeto del linguaggio si arresta e la accetta se questa è una formula valida di tale linguaggio, oppure si arresta e la rigetta in caso contrario. Vi sono linguaggi formali che sono accettabili da una macchina di Turing, ma che non sono decidibili da una macchina di Turing. Come abbiamo già ricordato, Turing (1937) ha dimostrato che un esempio importante di tali linguaggi è il

linguaggio in cui può essere formulato il problema della fermata, ovvero il problema di decidere se, dato un certo input, un dato programma si arresterà o meno. Turing ha dimostrato che non vi è alcun algoritmo in grado di decidere in generale il problema della fermata, ovvero che non vi è alcuna macchina di Turing in grado di deciderlo. Il teorema di Rice generalizza tale risultato, dato che dimostra che ogni proprietà non banale dei linguaggi accettabili dalle macchine di Turing è indecidibile, ovvero che non vi è alcun algoritmo in grado di decidere in generale se un dato linguaggio L possieda la proprietà non banale S .

Un insieme arbitrario di linguaggi S è detto essere una proprietà dei linguaggi accettabili dalle macchine di Turing se tutti i membri di S sono linguaggi accettabili da una macchina di Turing, ovvero se per ogni linguaggio che appartiene a S vi è una macchina di Turing che lo accetta, ovvero che è in grado di enumerare tutte le formule valide di tale linguaggio. Diciamo, quindi, che un dato linguaggio L ha la proprietà S se $L \in S$. La proprietà S , come detto, è detta banale se l'insieme S è vuoto o se S è l'insieme di tutti i linguaggi accettabili dalle macchine di Turing. Se M è una macchina di Turing, indichiamo con $L(M)$ il linguaggio che è accettato da M . Possiamo definire il linguaggio della proprietà S come segue:

$$L_S = \{\langle M \rangle \mid M(L) \in S\},$$

ovvero come l'insieme dei numeri naturali che codificano tutte quelle macchine di Turing che riconoscono un linguaggio che ha la proprietà S . Ora, per il teorema di Rice, se S è una proprietà non banale, allora L_S non è decidibile. La dimostrazione del teorema di Rice non è molto dissimile dalla dimostrazione del teorema di Turing e da quanto visto sopra in relazione al fatto che non tutte le funzioni computabili sono dimostrabilmente computabili, ovvero assume per assurdo che L_S sia decidibile e che S sia una proprietà non banale, ovvero che enumerati tutti i linguaggi che appartengono a S ed enumerati tutti i linguaggi che non vi appartengono, sia i l'indice del primo linguaggio dell'enumerazione che appartiene a S e sia j l'indice del primo linguaggio dell'enumerazione che non appartiene a S , per cui $i \in S$ e $j \notin S$, e costruisce poi una funzione diagonale totale $C(x)$ che è tale da restituire i se $x \notin S$ e j se $x \in S$, conducendo così a una contraddizione, dato che, per ipotesi, $i \in S$ e $j \notin S$, e conclude che L_S non è decidibile. Dato che, come detto, la correttezza è una proprietà non banale dei programmi informatici, per il teorema di Rice non vi è alcuna procedura meccanica, ovvero alcun algoritmo, per decidere in generale se un dato programma sia corretto o meno.

Come scrive Thurston, «l'affidabilità non deriva dal fatto che i matematici verificano formalmente argomenti formali; deriva dal fatto che i matematici riflettono attentamente e criticamente sulle idee matemati-

che» (Thurston 1994, p. 170). Analogamente, Hersh scrive che, in ultima analisi, è la comprensione umana «che verifica la correttezza della computazione formale» (Hersh 1979, p. 43). Infatti, la formalizzazione non elimina affatto la possibilità di errore, né assicura la correttezza delle dimostrazioni, per il fatto di rendere il processo di verifica della correttezza delle dimostrazioni indipendente dal soggetto epistemico umano, dato che «semplicemente non si dà il caso che una dimostrazione incerta diventi certa per il fatto di venire formalizzata. Al contrario, l'incertezza della dimostrazione sarebbe a quel punto rimpiazzata dall'incertezza della codifica e della programmazione» (*ibidem*).

Analizzata anche questa possibile linea difensiva della concezione assiomatica della conoscenza matematica e mostratane l'inadeguatezza, sembra lecito sostenere che non siano state ancora fornite sufficienti ragioni per ritenere che il mantenimento della concezione assiomatica della matematica sia adeguatamente supportato da alcuni risultati della logica matematica, come l'isomorfismo di Curry-Howard, e dalle prospettive delle ricerche legate all'automazione del ragionamento.

Bibliografia

- Aberdein, A. (2007). *The Informal Logic of Mathematical Proof*, in B. Van Kerkhove, J.P. Van Bendegem (eds), *Perspectives on Mathematical Practices*, Dordrecht: Springer, pp. 135-151.
- Anonymous (1994). *The QED Manifesto*, in A. Bundy (ed.), *Automated Deduction – CADE-12*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 238-251.
- Antonutti Marfori, M. (2010). "Informal Proofs and Mathematical Rigour", *Studia Logica*, 96(2): 261-272.
- Azzouni, J. (2004). "The Derivation-Indicator View of Mathematical Practice", *Philosophia Mathematica*, 12(2): 81-105.
- Boolos, G., Burgess, J., Jeffrey, R. (2002). *Computability and Logic*, 4th ed., Cambridge: Cambridge University Press.
- Calude, C.S., Thompson, D. (2016). *Incompleteness, Undecidability and Automated Proofs*, in V.P. Gerdt, W. Koepf, W.M. Seiler, E.V. Vorozhtsov (eds.), *Computer Algebra in Scientific Computing. CASC 2016*, Cham: Springer, pp. 134-155.
- Cellucci, C. (2013). *Rethinking Logic: Logic in Relation to Mathematics, Evolution, and Method*, Dordrecht: Springer.
- Cellucci, C. (2017). *Rethinking Knowledge: The Heuristic View*, Cham: Springer.
- Cellucci, C. (2022). *The Making of Mathematics: Heuristic Philosophy of Mathematics*, Cham: Springer.
- Colton, S. (2002). *Automated Theory Formation in Pure Mathematics*, London: Springer-Verlag.
- Colton, S., Bundy, A., Walsh, T. (1999). *Automatic Concept Formation in Pure Mathematics*, in D. Thomas (ed.), *Proceedings of the Sixteenth International*

- Joint Conference on Artificial Intelligence*. Volume 2, San Francisco: Morgan Kaufmann, pp. 786-791.
- Curry, H.B. (1934). "Functionality in Combinatory Logic", *Proceedings of the National Academy of Science*, 20(11): 584-590.
- Curry, H.B. (1977). *Foundations of Mathematical Logic*, Dover: New York.
- Davis, P.J., Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*, Boston: Birkhäuser.
- Dutilh Novaes, C. (2012). *Formal Languages in Logic: A Philosophical and Cognitive Analysis*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Friend, M. (2014). *Pluralism in Mathematics: A New Position in Philosophy of Mathematics*, Dordrecht: Springer.
- Gödel, K. (1931). "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38: 173-198.
- Gödel, K. (1935). Recensione di: Carnap, R. "Die Antinomien und die Unvollständigkeit der Mathematik", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 41: 263-284 (1934), *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete*, 11: 1.
- Goethe, N.B., Friend, M. (2010). "Confronting Ideals of Proof with the Ways of Proving of the Research Mathematician", *Studia Logica*, 96(2): 273-288.
- Hales, T. (2008) "Formal Proof", *Notices of the AMS*, 55(11): 1370-1380.
- Hersh, R. (1979) "Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics", *Advances in Mathematics*, 31(1): 31-50.
- Hersh, R. (1997). *What Is Mathematics, Really?*, Oxford: Oxford University Press.
- Howard, W.A. (1980). *The Formulae-as-Types Notion of Construction*, in J.R. Hindley, J.P. Seldin (eds.), *To H.B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism*, New York: Academic Press, pp. 479-490.
- Kreisel, G. (1970). "The Formalist-Positivist Doctrine of Mathematical Precision in the Light of Experience", *L'Âge de la Science*, 3: 17-46.
- Kripke, S.A. (2013). *The Church-Turing 'Thesis' as a Special Corollary of Gödel's Completeness Theorem*, in B.J. Copeland, C.J. Posy, O. Shagrir (eds.), *Computability*, Cambridge (MA): MIT Press, pp. 77-104.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Larson, C.E. (2005). *A Survey of Research in Automated Mathematical Conjecture-Making*, in S. Fajtlowicz, P.W. Fowler, P. Hansen, M.F. Janowitz, F.S. Roberts (eds.), *Graphs and Discovery*, Providence (RI): American Mathematics Society, pp. 297-318.
- Larvor, B. (2012). "How to Think about Informal Proofs", *Synthese*, 187(2): 715-730.
- Larvor, B. (2016). "Why the Naïve Derivation Recipe Model Cannot Explain How Mathematicians' Proofs Secure Mathematical Knowledge", *Philosophia Mathematica*, 24(3): 401-404.
- Lavers, G. (2024). *Mathematics is (mostly) Analytic*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Longo, G. (2003). "Proofs and Programs", *Synthese*, 134(1-2): 85-117.
- Macbeth, D. (2015). *Reasoning in Mathematics and Machines: The Place of Mathematical Logic in Mathematical Understanding*, in G. Dodig-Crnkovic,

- Y.J. Erden, R. Giovagnoli (eds.), *Proceedings of the AISB 2015 Symposium on Social Aspects of Cognition and Computing*, Canterbury: University of Kent, pp. 3-12.
- Macbeth, D. (2024). *Formal Proofs in Mathematical Practice*, in B. Sriraman (ed.), *Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice*, Cham: Springer, pp. 2113-2135.
- Mac Lane, S. (1986). *Mathematics: Form and Function*, New York: Springer-Verlag.
- McCarthy, T.G. (1994). "Self-Reference and Incompleteness in a Non-Monotonic Setting", *Journal of Philosophical Logic*, 23(4): 423-449.
- Moschovakis, J. (2018). *Intuitionistic Logic*, in E.N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/win2018/entries/logic-intuitionistic/>>.
- Pantsar, M. (2024). "Theorem Proving in Artificial Neural Networks: New Frontiers in Mathematical AI", *European Journal for Philosophy of Science*, DOI: 10.1007/s13194-024-00569-6.
- Pelc, A. (2009). "Why Do We Believe Theorems?", *Philosophia Mathematica*, 17(1): 84-94.
- Portoraro, F. (2025). *Automated Reasoning*, in E.N. Zalta, U. Nodelman (eds.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/spr2025/entries/reasoning-automated/>>.
- Prawitz, D. (2008). *Proofs Verifying Programs and Programs Producing Proofs: A Conceptual Analysis*, in R. Lupacchini, G. Corsi (eds.), *Deduction, Computation, Experiment: Exploring the Effectiveness of Proof*, Berlin: Springer, pp. 81-94.
- Rav, Y. (2007). "A Critique of a Formalist-Mechanist Version of the Justification of Arguments in Mathematicians' Proof Practices", *Philosophia Mathematica*, 15(3): 291-320.
- Rice, H.G. (1953). "Classes of Recursively Enumerable Sets and Their Decision Problems", *Transactions of the American Mathematical Society*, 74(2): 358-366.
- Robinson, J.A. (1997). *Informal Rigor and Mathematical Understanding*, in G. Gottlob, A. Leitsch, D. Mundici (eds.), *Computational Logic and Proof Theory*, Berlin: Springer-Verlag, pp. 54-64.
- Rodin, A. (2014). *Axiomatic Method and Category Theory*, Cham: Springer.
- Sørensen, M.H., Urzyczyn, P. (2006). *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism*, Amsterdam: Elsevier.
- Tanswell, F. (2015). "A Problem with the Dependence of Informal Proofs on Formal Proofs", *Philosophia Mathematica*, 23(3): 295-310.
- Thurston, W.P. (1994). "On Proof and Progress in Mathematics", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30(2): 161-177.
- Turing, A.M. (1937). "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem", *Proceedings of the London Mathematical Society* 42(1), pp. 230-265.
- von Plato, J. (2018). *The Development of Proof Theory*, in E.N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/win2018/entries/proof-theory-development/>>.
- Wadler, P. (2015). "Propositions as Types", *Communications of the ACM*, 58(12): 75-84.

Weir, A. (2021). *Formalism in the Philosophy of Mathematics*, in E.N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/sum2021/entries/formalism-mathematics/>>.

Weyl H. (1949). *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton: Princeton University Press.

Concezione assiomatica, dimostrazioni formali e meccanizzabilità della matematica

Secondo la concezione assiomatica della matematica, fare matematica significa principalmente dimostrare teoremi, ovvero produrre dimostrazioni in un sistema formale a partire da determinati assiomi. Per Hilbert, la formalizzazione della matematica aveva come scopo principale fornire una fondazione sicura alla matematica. La concezione assiomatica è stata messa in crisi dai teoremi di Gödel, che mostrano come lo scopo che Hilbert assegnava alla formalizzazione della matematica non possa essere raggiunto. Molti sostenitori della concezione assiomatica ritengono però che ciò non debba significare l'abbandono di tale concezione e affermano che altri risultati della logica matematica, come l'isomorfismo di Curry-Howard, forniscono ragioni sufficienti al mantenimento di tale concezione della matematica. Scopo di questo articolo è valutare tale affermazione.

PAROLE CHIAVE: metodo assiomatico, ragionamento automatizzato, dimostrazioni informali, isomorfismo di Curry-Howard, teoremi di incompletezza di Gödel.

The Axiomatic View, Formal Proofs, and Mechanizability of Mathematics

According to the axiomatic view of mathematics, doing mathematics means primarily proving theorems, that is, producing proofs in a formal system starting from certain axioms. For Hilbert, the main purpose of formalizing mathematics was to provide a secure foundation for mathematics. The axiomatic view was called into question by Gödel's theorems, which showed that the purpose that Hilbert assigned to the formalization of mathematics could not be achieved. Many supporters of the axiomatic view believe, however, that this should not mean abandoning this view and claim that other results of mathematical logic, such as the Curry-Howard isomorphism, provide sufficient reasons to maintain this view of mathematics. The purpose of this article is to evaluate that claim.

KEYWORDS: axiomatic method, automated reasoning, informal proofs, Curry-Howard isomorphism, Gödel's incompleteness theorems.

Giulio Amore

Turing filosofo trascendentale: computazione, macchine intelligenti e razionalità

Introduzione

Alan Turing rappresenta una delle più importanti figure scientifiche del secolo scorso. Il numero di articoli in cui Turing viene citato è oggi in costante crescita, soprattutto a partire dal 2020¹. Ciò è sicuramente da mettere in relazione con il recente *AI-boom*, lanciato dal susseguirsi dei vari rilasci di sistemi di intelligenza artificiale (prevalentemente *Large Language Models*), ma è anche una dimostrazione dell'attualità del lavoro del matematico inglese. In questo articolo, intendo sostenere, al pari di Hainscho (Hainscho 2017) e di Hodges (Hodges 1997), come i lavori di Turing sulle macchine intelligenti e sulla computazione possano essere considerati, oltre che matematicamente rilevanti, anche *filosoficamente significativi*. Tuttavia, intendo caratterizzare ulteriormente l'indagine di Turing come *trascendentale*, incentrata da un lato su condizioni di possibilità e limiti trascendentali della computazione e delle macchine intelligenti, dall'altro sull'idea che l'intelligenza o meno di un sistema non dipenda dalla presenza di un soggetto (intelligente) dotato di caratteristiche intrinseche a renderlo tale, ma sulla presenza o meno di attività riconosciute come intelligenti.

Innanzitutto, l'articolo prenderà in esame alcuni importanti lavori di Turing sulle macchine intelligenti e la computabilità (§1), per poi proseguire attraverso il più celebre articolo sull'*Imitation game* (§2). Dopodiché, elencherò le ragioni in base alle quali si può considerare Turing come

¹ Stando alle statistiche di *Google Scholar*, su un totale di 74597 citazioni, ben 25514 (poco più di un terzo) sono posteriori al 2020. *Cfr.* <https://scholar.google.com/citations?user=VWCHlwkAAAAJ&hl=it&oi=sra> (accesso effettuato in data 28/05/2025).

un filosofo trascendentale (§3), esplorando infine la tesi che la computazione stessa possa essere considerata come una forma di razionalità (§4).

1. Turing e le macchine intelligenti: *Entscheidungsproblem* e *Intelligence machinery*

Turing comincia a lavorare all'idea di una intelligenza macchinica sin dal 1941, anno nel quale si dice circolasse un ormai perduto manoscritto sull'argomento (Copeland 2004). Nel 1947 il matematico inglese tenne il suo primo intervento sull'"intelligenza computazionale" e nell'anno seguente scrisse quello che, secondo Jack Copeland, può essere considerato il primo vero "manifesto" dell'intelligenza artificiale (Copeland 2004).

Il saggio, pubblicato postumo, comincia anticipando alcune possibili obiezioni all'ipotesi di una *macchina intelligente*, molte delle quali riconducibili a tre tendenze: un pregiudizio tipicamente umano di non avere rivali in termini di intelligenza; una sorta di *irriverenza prometeica* ("una credenza religiosa che ogni tentativo di costruire tali macchine sia una sorta di Irriverenza Prometeica" (Turing 2004, p. 410)); la convinzione che ogni manifestazione di uno o più comportamenti intelligenti sarebbe solo un mero riflesso del rispettivo creatore (Turing 2004, pp. 410-411). Un'ulteriore obiezione, dice Turing, può essere ricavata dai teoremi di Gödel:

Recentemente, il teorema di Gödel e i risultati ad esso correlati [...] hanno mostrato che, se si tenta di utilizzare delle macchine con scopi come determinare la verità o la falsità di teoremi matematici e non si è disposti a tollerare un errore occasionale, allora qualsiasi macchina data in alcuni casi non sarà in grado di fornire alcuna risposta. Al contrario l'intelligenza umana sembra capace di trovare sempre migliori per risolvere quei problemi, 'trascendendo' i metodi a disposizione delle macchine. (Turing 2004, pp. 410-411)

La presenza o assenza di intelligenza, controbatte Turing, non dipende dalla possibilità di compiere un errore, infatti, essa non risiede nel successo di una azione, ma nell'effettivo *uso* di una facoltà o nell'*esercizio* di determinate funzioni (Turing 2004).

Per testare seriamente l'ipotesi di una macchina intelligente dobbiamo selezionare quelle "*branches of thought*" in cui la macchina possa effettivamente applicarsi e il cui svolgimento sia: 1) subordinato al possesso di una qualche forma di intelligenza; 2) non richiedente necessariamente un corpo completo di organi sensori e motori. Queste *attività* sono: giochi come poker o scacchi, apprendimento linguistico, traduzione, crittografia, matematica (Turing 2004, p. 420).

Tuttavia, è necessario soffermarsi sul tema dell'apprendimento di una macchina (*"Education of machinery"*). Pensare infatti di poter realizzare una macchina che imiti un'intelligenza umana ben formata è un'impresa non solo difficile, ma anche poco realistica. Molto più promettente sembra invece la possibilità di partire da una macchina non-organizzata e di organizzarla via via attraverso un sistema premio-punizione (Turing 2004, pp. 421–422).

Pertanto, dopo alcune proposte preliminari, Turing presenta un tipo particolare di macchina non-organizzata, basata anch'essa su un sistema premio-punizione, ma più raffinato, chiamata *p-type machine*. Questa *p-type machine*, avverte Turing, è da considerare come una *"logical computing machine"* (LCM) senza un vero e proprio nastro che, nella sua versione "universal", rappresenta quella che viene ricordata come *Macchina di Turing* (TM) (Turing 1936). Turing, riassumendo, descrive una LCM così:

[Ha] una capacità di memoria infinita, realizzata sotto forma di un nastro infinito suddiviso in caselle, ciascuna delle quali poteva contenere un simbolo. In ogni momento vi è un solo simbolo all'interno della macchina, detto simbolo scansionato. La macchina può modificare il simbolo scansionato, e il suo comportamento è in parte determinato da esso; tuttavia, i simboli presenti altrove sul nastro non influenzano il comportamento della macchina. Il nastro, però, può essere fatto scorrere avanti e indietro attraverso la macchina: questa è una delle operazioni elementari che essa è in grado di compiere. Di conseguenza, qualsiasi simbolo presente sul nastro potrà, in linea di principio, entrare in gioco. (Turing 2004, p. 413)

È alla luce dell'articolo del 1948 che diventa esplicita l'importanza fondamentale, anche in campo cognitivo, del concetto di TM proposto nel 1936, testimoniando la stretta vicinanza ed estrema continuità dei due articoli (Shanker 1987). Sintetizzando la conclusione dell'articolo del 1936, possiamo asserire che: un numero è computabile quando può essere scritto e trasformato attraverso un set di regole pre-determinato da una macchina (Turing 1936). Cos'è concretamente tuttavia la *computazione*? Se un problema è computabile, significa che è risolvibile da una TM, ovvero, è risolvibile da una macchina ideale, con memoria infinita, che, attraverso permutazioni guidate da una o più regole di esecuzione, manipola i simboli a sua disposizione per raggiungere una soluzione. La computazione, pertanto, sarà il processo mediante il quale un problema, rappresentabile attraverso simboli, viene risolto in base a determinate regole di esecuzione formalizzabili. Turing, introducendo il concetto di *computazione* per risolvere l'*Entscheidungsproblem*, apre le porte ad un'ipotesi che tutt'oggi mostra ancora la sua proficua problematicità: se un'operazione è computabile, allora è risolvibile da una macchina.

L'articolo del 1948 mostra come TM non sia solamente un artefatto concettuale riguardante la sola matematica, atto a risolvere il problema della computabilità, ma un artefatto concettuale che riguarda da vicino filosofia e tecnologia, che mette in crisi un concetto di intelligenza antropocentrico e che sulla cui crisi permette di costruire l'ipotesi di una macchina intelligente. L'idea di intelligenza intesa a partire da una facoltà riservata esclusivamente all'essere umano viene definitivamente affrontata e messa in discussione nel celebre articolo del 1950: *Computing Machinery and Intelligence*.

2. Il ruolo della *performance* nell'*Imitation Game*

L'articolo, considerato il primo ad affrontare la possibilità di meccanicizzare l'intelligenza umana (Nilsson 2010), comincia sin da subito col mettere in discussione la domanda a cui parrebbe fondamentale dare una risposta, essendo all'interno di un dibattito sulle macchine pensanti. La domanda "*Can machines think?*" è infatti considerata come ambigua. Come rispondere se non abbiamo infatti chiaro né cosa significhi il termine *macchina* né *pensare*? (Turing 1950, p. 433).

Turing, pertanto, sposta il focus della domanda o, meglio, sposta il terreno di risposta. Non si tratterà di elaborare una teoria del pensiero che possa per così dire accomodare una o più definizioni di macchina, di computazione e di intelligenza macchinica, bensì, di elaborare un gioco, l'*Imitation game*, che passerà alla storia anche come *Test di Turing*, che ci permetta di riflettere sull'interrogativo iniziale sulla base di un comportamento, di una *performance*. Questo è un elemento fondamentale e discriminante: ancora una volta, l'approccio di Turing è basato su una *performance* intellettuale, non sulla struttura del cervello umano o di quella "neurale" della macchina.

Nelle pagine conclusive dell'articolo, egli sembra concludere che per vedere effettivamente dei risultati positivi, dunque, diremo noi, degli epifenomenici comportamenti cosiddetti intelligenti, bisognerà attendere quantomeno la fine del secolo (Turing 1950, p. 442). Tuttavia, l'obiettivo di Turing non è programmare nel 1950 una macchina intelligente, ma tracciare le condizioni di possibilità di una macchina che manifesti, performativamente parlando, un comportamento intelligente agli occhi di un osservatore esterno e analogo ad uno dello stesso tipo performato da un essere umano e per fare ciò propone il noto *Imitation Game* (Turing 1950, p. 434)².

² Per un resoconto dettagliato dell'*Imitation Game*, vedi anche (Grigenti 2021, pp. 185-189)

Ora, dice Turing, se sostituissimo uno dei partecipanti e mettessimo una macchina al suo posto, cosa accadrebbe? (Turing 1950, p. 434).

La macchina da introdurre all'interno del gioco, tuttavia, non sarà una macchina qualsiasi, bensì una macchina che Turing chiama *digital computer*. Non esisteva un *digital computer* all'epoca di Turing, ma non c'è bisogno che fosse esistito realmente, che il test, diremmo, fosse concretamente effettuato; l'importante è che ci fossero (e che ci siano) le condizioni di possibilità per poter immaginare una macchina capace di superarlo, capace di ingannare l'interrogatore.

[Noi] non ci stiamo chiedendo se tutti i computer digitali si comporterebbero bene nel gioco o se i computer attualmente a disposizione lo farebbero, ma se esistano computer concepibili che lo farebbero. (Turing 1950, p. 436)

La via tracciata, incentrata non tanto sulla vera e propria progettazione di una macchina intelligente, quanto più sull'idea di una macchina ipotetica con la possibilità di svolgere compiti intellettualmente caratterizzati in modo analogo all'essere umano, sfocia nel paragrafo 5, intitolato *Universality of Digital Computers*.

Innanzitutto, il *digital computer* può esser considerato una '*discrete state machine*' (oggi diremmo a stati finiti, o *Finite-state machine*). Nello specifico, questo implica che la macchina passi da uno stato definito all'altro, in base a delle regole. Conoscendo le regole di azione, a partire da un qualsiasi stato discreto si può prevedere il successivo.

Dunque, una macchina universale ideale a stati discreti, dotata delle corrette tavole di istruzioni, può in teoria replicare il comportamento di una qualsiasi specifica macchina a stati discreti. Perciò, se il *digital computer* può effettivamente calcolare, sulla base di uno stato *x*, un qualsiasi stato *y* successivo, determinato in base allo specifico set di istruzioni a disposizione, va da sé che, in virtù del fatto di poter operare con qualsiasi set di istruzioni, e di conseguenza imitare ogni macchina a stati discreti, esso possa essere una *macchina universale* (Turing 1950, p. 441).

La domanda iniziale (*Can machines think?*) è dunque definitivamente riformulata nel seguente modo:

Possiamo ora tornare a considerare la questione sollevata alla fine del §3. Era stato suggerito, in via ipotetica, di sostituire la domanda "Le macchine possono pensare?" con "Esistono computer digitali concepibili che si comporterebbero bene nel gioco dell'imitazione?". Se lo si desidera, si può formulare questa domanda in modo apparentemente più generale e chiedere: "Esistono macchine a stati discreti che si comporterebbero bene?". Tuttavia, alla luce della proprietà di universalità, si comprende che entrambe queste formulazioni sono equivalenti alla seguente: "Fissiamo la nostra attenzione su un particolare computer digitale *C*. È vero che, modificando opportuna-

mente questo computer per dotarlo di una memoria adeguata, aumentando sufficientemente la sua velocità di esecuzione e fornendogli un programma appropriato, C possa essere reso capace di svolgere in modo soddisfacente il ruolo di A nel gioco dell'imitazione, assumendo che il ruolo di B sia ricoperto da un essere umano?" (Turing 1950, p. 442)

L'idea di fondo è che una conversazione effettuata attraverso un sistema tale da impedire di avere contatto diretto tra gli interlocutori, il che rivelerebbe evidentemente l'identità degli stessi, sia effettivamente "performabile" da una macchina, nello specifico un *digital computer*, in maniera sufficientemente adeguata da trarre in inganno l'interrogatore, sembrando ai suoi occhi sufficientemente umano.

Nel settimo e ultimo capitolo, intitolato *Learning Machines*, Turing riprende alcune riflessioni che abbiamo già potuto analizzare nella disamina dell'articolo inedito del 1948. In questa sede Turing propone un'alternativa alla programmazione, fin troppo complessa, di una macchina che simuli una mente adulta: produrne una che simuli la mente di un bambino e che apprenda e si strutturi a partire da una programmazione iniziale meno impegnativa, orientata all'apprendimento.

Come nello scritto del 1948, anche qui il metodo fondamentale di insegnamento viene riconosciuto nel sistema premio-punizione, accompagnato tuttavia da uno sfondo di inferenze logiche, fatti e congetture riconosciute come vere.

Tuttavia, lo stesso Turing intravede la direzione per una svolta che permetta di andare oltre questi "imperativi" logici da inscrivere all'interno del codice di un programma: inserire un elemento di casualità nella macchina ("*a random element in a learning machine*") per quei problemi che presentano un ventaglio di soluzioni accettabili, al fine di replicare un comportamento intelligente che non consiste in un comportamento completamente casuale, ma nemmeno perfettamente disciplinato (Turing 1950, p. 459).

Sganciarsi leggermente da un comportamento perfettamente disciplinato, introdurre un elemento *casuale*, riuscire a trovare una soluzione sufficientemente adeguata (e non quella assolutamente migliore, nel caso di più soluzioni valide), introdurre l'idea di un processo che sia rappresentabile da una *percentuale* di certezza, dunque non assoluta, sono tutti passaggi molto chiari nella direzione di un tipo di programmazione che dovrà attendere più di trent'anni prima di essere effettivamente realizzabile, ma che dimostrerà di essere probabilmente l'approccio migliore (Gershman et al. 2015). Inoltre, sia l'idea di un sistema "bambino" che si forma da sé, che l'idea di introdurre un elemento di casualità all'interno della macchina diventano ancora più significative se considerate alla luce del successivo lavoro di Turing sulla *morfogenesi* (Turing 1952) e sulla rilevanza in esso dei concetti di *forma* e *formazione* (Grigenti 2022).

Concludendo, il concetto di *macchina intelligente* presente nei lavori di Turing indica una macchina in cui l'atto-computativo rappresenta l'atto cognitivo, in cui la programmazione diventa lo strumento chiave di successo, in cui lo scopo è performativo: fare sì che la macchina funzioni in maniera analoga alla mente umana³, basandosi sull'idea, tipicamente wittgensteiniana⁴, che la capacità cognitiva si manifesti in attività e non in forme certe e stabili (Tamborini 2025).

3. Turing come filosofo trascendentale

Kant definisce *trascendentale* quel tipo di conoscenza a priori che si occupa del modo di conoscere gli oggetti e non tanto degli oggetti in quanto tali (Kant 1968, B25). Turing si interroga direttamente sulle condizioni di possibilità della computazione stessa, definendone in linea di principio le condizioni affinché possa verificarsi un "atto computativo" in quanto tale (i.e. se il problema è risolvibile da una macchina universale). Come fa notare Hodges (Hodges 1997), la soluzione al problema della "dimostrabilità" di Hilbert presentata nell'articolo del 1936 è profondamente originale, pur giungendo alle stesse conclusioni (negative) di Church (Church 1936).

Turing, infatti, abbandona la tradizionale dimostrazione matematica e presenta invece quello che a tutti gli effetti è un esperimento mentale, tipico strumento filosofico (Casati 2011), introducendo una nuova idea,

³ La rilevanza per quanto riguarda questo aspetto di Turing viene sottolineata anche da McCorduck (McCorduck 2004, 143, in nota).

⁴ Sono note le critiche mosse da Wittgenstein a Turing come filosofo o, meglio, di come Wittgenstein non accettasse l'argomento-ponte tra matematica e filosofia della mente rappresentato dalla *TM* presente nell'articolo del 1936 (Shanker 1987). Le critiche di Wittgenstein erano dirette in generale all'idea stessa di macchine intelligenti, considerate incapaci di produrre una vera e propria *prassi* intelligente in virtù della loro stretta rigidità e della loro aderenza assoluta alle regole di programmazione. Wittgenstein, infatti, pensava che le *TM* fossero di fatto un'estrema formalizzazione di un "uomo-che-calcola" (Wittgenstein 1980). Sebbene molti critici considerino questi elementi per tracciare un confine netto tra le due figure, financo un conflitto, a volte traslasciano la necessità, ravvisata invece da Shanker (Shanker 1987), di contestualizzare cronologicamente queste critiche, avvenute in gran parte quando ancora l'idea di *macchine intelligenti* di Turing non era pienamente sviluppata. Inoltre, proprio l'attenzione di Turing alla *performance*, all'attività, alla possibilità di un apprendimento guidato da un sapere che si forma con il rispetto di "regole" ma solo all'interno della "prassi", non può non far pensare alle pagine delle *Ricerche* riguardanti l'apprendimento tramite rispetto e contravvenzione alle determinate regole e comandi validi in un contesto, in un *gioco* (Wittgenstein 1953). Per una disamina più approfondita delle possibili interpretazioni del rapporto tra il pensiero di Wittgenstein e Turing cfr. (Proudfoot 2024).

un nuovo concetto, quello di computabilità. Inoltre, all'interno del suo articolo, Turing mostra un interesse particolare per i limiti della computazione, il che caratterizza ancora di più la proposta in termini trascendentali classicamente intesi.

La ricerca di una soluzione all'*Entscheidungsproblem* (dimostrare se ogni problema formalizzato sia deducibile attraverso un sistema formale e dunque universalmente valido) diventa la ricerca di una soluzione al problema trascendentale della computazione (poter stabilire a priori se un enunciato sia o meno deducibile). La risposta, però, è altrettanto trascendentale, poiché individua le condizioni di possibilità ed i limiti della computazione (per esempio quello denominato successivamente come *Halting Problem* (Rogers (Jr.) 1957)), rispondendo così di fatto anche alla domanda originaria: siccome esistono problemi non computabili, esistono problemi non risolvibili attraverso un sistema formale di calcolo.

Ma come stabilire quali operazioni siano computabili? La risposta viene data attraverso la proposta di un "*criterio attivo di decidibilità*": sono computabili quelle funzioni che possono essere computate da una TM. L'elemento radicalmente trascendentale, per certi versi diverso rispetto a quello kantiano già menzionato poco sopra, risiede proprio in ciò: la TM presa così in sé non è una condizione a priori della computabilità (c'è una TM $\rightarrow$ c'è computabilità $\rightarrow$ il problema è risolvibile formalmente), ma è condizione attiva a priori della computabilità (c'è una TM $\rightarrow$ l'attività di quella TM, un processo computativo, può risolvere il problema $\rightarrow$ il problema è risolvibile formalmente). Lo scarto concettuale rappresentato dal costrutto ideale in cui consiste la TM mostra la profonda radicalità dell'argomento di Turing, il quale risolve l'*Entscheidungsproblem* attraverso la soluzione della questione, trascendentale, sui criteri a priori per stabilire, altrettanto a priori, le condizioni di deducibilità formale di un problema. Ma è qui, ribadisco, il passaggio fondamentale: la TM non è un criterio formale a priori, la cui esistenza o semplice presenza basta a soddisfare le condizioni di possibilità della computazione, ma è un criterio attivo a priori la cui attività operativa – se possibile – funge da condizione a priori della possibilità della computazione, e perciò della deducibilità formale del problema in questione. Il fatto che l'attività della TM sia trascendentalmente limitata, inoltre, risolve il problema posto da Hilbert in maniera critico-trascendentale, registrando appunto i limiti dell'attività della TM⁵, quindi della computabilità, concludendo che non ogni problema formalmente esprimibile sia altrettanto formalmente risolvibile.

⁵ E di fatto della TM stessa essendo un costrutto ideale che si dà nel suo essere intesa a partire dalla possibilità di una attività: la computazione.

Il tema dell'attività diverrà centrale in tutti i successivi lavori, culminando nell'articolo del 1950, che rappresenta pertanto il punto di arrivo di questa proposta trascendentale più profonda, radicata nell'idea di un'attività come orizzonte di possibilità della computazione, dunque dell'intelligenza macchinica, non nella presenza o meno di una determinata entità o soggetto già formato⁶. Il focus, infatti, non è sulla macchina universale in quanto tale, ma sull'attività della macchina universale. A fondamento sta un'attività, non la presenza di un principio statico a priori. La vera domanda implicita nell'articolo del 1950 è se effettivamente una “certa capacità di manipolare simboli in un contesto nel quale lo scambio di significati avviene in modo puramente funzionale” (Grigenti 2021, p. 187), i.e. nel caso della macchina uno o più atti computativi, possa fondare l'agire intelligente. Tuttavia, che il *Test* proposto nell'articolo riguardi solo l'agire intelligente di una macchina, non è per nulla scontato, o quanto meno, rimane non precisato e rappresenta ancora oggi una delle maggiori difficoltà interpretative (Grigenti 2021).

Ad ogni modo, Turing opera uno spostamento della domanda stessa: non si chiede più “che cosa” sia intelligente, ma “come” qualcuno o qualcosa possa esserlo.

Nel prossimo paragrafo non analizzerò l'ampio concetto di intelligenza, ma considererò una componente prominente di essa: la razionalità (Burgoyne et al. 2023), cercando poi di dimostrare che la computazione può essere considerata come una forma di razionalità. Se così fosse, infatti, Turing avrebbe posto le basi non solo ad un'interrogazione trascendentale sulla computabilità, ma ad una interrogazione trascendentale *tout court* della razionalità (e di conseguenza anche dell'intelligenza *simpliciter* o quantomeno di una sua componente).

4. Computazione e razionalità

Si potrebbe obiettare che per rispondere alla domanda di cui sopra, sia necessario fornire una definizione precisa di razionalità. Turing stesso evidenzia tuttavia che richieste simili (analoghe al chiedersi cosa sia “pensiero”) sono questioni non solo scomode da affrontare, ma anche possibilmente deleterie al fine di raggiungere delle conclusioni proficue (Turing 1950).

Se prendiamo tuttavia un'attività qualsiasi e proviamo a considerarla sotto due aspetti differenti, affinché dall'uno emerga come un processo

⁶ Un trascendentale che definirei più fichtiano che kantiano, in analogia con l'idea fichtiana di un soggetto che non costituisce il principio primo dell'attività “visiva”, ma che al contrario è fondato immanentemente dall'attività “visiva” stessa all'interno tuttavia di un processo non rappresentabile causalmente (Rametta 2014).

non razionale e dall'altro come processo razionale, potremmo trovare alcuni criteri per individuare le caratteristiche dell'esercizio della razionalità. Consideriamo pertanto il seguente esperimento mentale.

Abbiamo due agenti (A e B) che si ritrovano a dover affrontare lo stesso problema: attraversare un ponte per recapitare un messaggio urgente. Tuttavia, il ponte in questione è stato danneggiato da una tempesta ed è ora pericolante.

A agisce nella seguente maniera: esamina lo stato del ponte, dividendo la struttura in differenti aree per valutare meglio i danni, e nota che alcune travi sono particolarmente danneggiate; ricorda di aver studiato a scuola alcuni principi di costruzione e tenuta dei ponti e li confronta con i danni riscontrati; inferisce che il ponte, se attraversato normalmente, potrebbe non tenere. Considera anche alcune alternative, come guadare il fiume oppure allungare il cammino per attraversarlo dove le sponde sono più vicine. Purtroppo, si rende conto che queste alternative prenderebbero troppo tempo. Decide così di attraversare comunque il ponte, ma appoggiando il peso, distribuendolo mettendosi a pancia in giù se possibile, solo su quelle travi che dovrebbero tenere, in base al suo ragionamento. Nonostante il timore di cadere e annegare, A riesce ad attraversare il ponte senza che crolli.

B si ritrova di fronte alla stessa situazione, tuttavia, agisce in maniera completamente diversa. B pensa che tutto sommato è stato fortunato ultimamente (anche se ha perso dieci franchi il giorno prima scegliendo croce al lancio di una moneta); fa qualche scongiuro a voce alta, poi corre dall'altra parte e una volta arrivato sull'altra sponda esclama: "l'avevo detto che sono fortunato ultimamente!"

B, inconsapevolmente, è riuscito a passare indenne il ponte proprio perché nell'attraversarlo ha appoggiato il suo peso solo su quelle travi portanti, quelle stesse che A aveva individuato grazie alle sue deduzioni.

La stessa azione, attraversare il ponte, è stata eseguita con successo da entrambi gli agenti, tuttavia, l'esperimento mentale mostra delle differenze abissali tra i due tentativi. Difficilmente diremmo razionale la strategia impiegata da B, quanto piuttosto basata su una sua sensazione, giustificabile tra l'altro solo da una superflua ripetizione incapace di spiegare la scelta (perché hai passato il ponte? "Perché sono fortunato." Perché sei fortunato? "Perché sono fortunato.").

A, invece, potrebbe riapplicare la stessa strategia su tutti i ponti che lo permettessero, e sarebbe inoltre capace di spiegare la ragione di ogni singolo passaggio, finalizzato alla prosecuzione in avanti lungo il ponte.

Dunque, la razionalità potrebbe essere intesa come quella capacità che, se usata, permette ad un'entità di dare una risposta ad uno stimolo generalmente complesso, all'interno di un determinato contesto C, applicando un metodo o una combinazione di metodi. La risposta, tuttavia,

non può essere genericamente caratterizzata, altrimenti qualsiasi sistema in grado di rispondere – in qualunque modo – a qualunque forma di eccitazione dovrebbe essere considerato razionale, il che è evidente paradossale (un lucchetto si apre quando viene inserita la combinazione giusta, ma non considereremmo l'azione di aprirsi come razionale). Pertanto, sulla scorta di quanto analizzato precedentemente, possiamo precisare e aggiungere che la risposta deve avere determinate caratteristiche.

Essa deve essere:

Giustificabile: effettuata seguendo un metodo, una o più regole il cui rispetto permetta di rendere ragione della risposta effettuata (dove una forma di coerenza interna). In generale, non casuale nel suo processo.

Produttiva: applicando determinate regole in risposta ad un dato (lo stimolo) semplice o complesso, produce una risposta. È operativa poiché appunto opera, a partire da un materiale di partenza, determinati passaggi, applica regole, e soprattutto produce una risposta.

Contestualizzata: se infatti il processo di risposta non tenesse conto di un criterio di coerenza esterna, se potesse darsi in forma completamente de-contestualizzata, non sarebbe di fatto coerente con lo stimolo e di conseguenza con quel contesto in cui è chiamato a dare risposta (se alla domanda “Quanto fa $2+2$? Si rispondesse: “gelato”, probabilmente non potremmo parlare di razionalità. La risposta, infatti, sarebbe realmente una risposta che attraverso determinate regole è organizzata e predisposta per rispondere a quello stimolo?)

Teleologica: proprio perché è orientata a produrre una risposta coerente, giustificabile, contestualizzata ad un determinato stimolo sulla quale opera, non può essere fine a sé stessa, ma è sempre, e ciò consegue evidentemente dalle caratteristiche sopra citate, orientata ad un fine. Inoltre, il criterio contraddice alcune critiche relative al tema delle “risposte sbagliate”. Immaginiamo che un *Sistema-a* produca una risposta r ad un quesito x . Ipotizziamo che $r(x)$ sia una risposta sbagliata al quesito x in questione. Quella risposta apparirà *a posteriori* come non-giustificabile, mettiamo caso per una contraddizione interna. Ora, se la razionalità del *Sistema-a* non fosse teleologicamente orientata, come potremmo noi affermare che, quando si danno risposte sbagliate, si sia comunque fatto un tentativo? Se non fosse guidata da un fine, ovvero produrre una risposta con le determinate caratteristiche sopra elencate, allora la razionalità verrebbe utilizzata soltanto quando si danno risposte corrette. Ma l'effettivo successo dell'applicazione della facoltà non può essere stabilito *a posteriori* rispetto all'effettivo successo. È il tentativo di dare una risposta giustificabile, coerente, contestualizzata che determina la presenza o meno di una forma di razionalità in atto. In altre parole, è solo se definiamo la razionalità come teleologicamente orientata – orientata alla produzione di una risposta giustificabile, coe-

rente, contestualizzata ad un determinato stimolo – che realmente comprendiamo la facoltà nel suo darsi, nella sua attività, e non riducendola alla correttezza o meno dei suoi risultati.

Considerato ciò, proviamo a spostarci e a valutare se effettivamente la computazione sia o meno una forma di razionalità. Esaminerò ognuna delle precedenti caratteristiche, ipotizzando per assurdo che esse non siano parti del processo computativo.

Produttività: stando alla definizione di Turing, un processo computativo è un processo che può risolvere un problema computabile, ovvero risolvibile mediante una o più permutazioni su un nastro ipotetico infinito attraverso l'applicazione di un determinato set di regole. Per non essere produttiva, la computazione non dovrebbe risolvere problemi, poiché se li risolvesse, produrrebbe una risposta. Ma la computazione è un processo atto a risolvere problemi. Se non dovesse fornire risposte, non avrebbe ragione di esistere. Dunque, se la computazione esiste, essa produce risposte, ed è perciò produttiva. Ci sono problemi a cui però la computazione non può rispondere. Se un problema non ha risposta mediante computazione, allora non è computabile, ma questo non implica che la computazione non sia produttiva, semplicemente pone dei limiti trascendentali alla computazione.

Giustificabilità (e non casualità): per definizione la computazione è quel processo atto alla soluzione di un problema attraverso una o più permutazioni effettuate secondo un set di regole. Se fosse casuale, allora non starebbe seguendo un set di regole, il che sarebbe in contraddizione con la definizione stessa di computazione.

Contestualizzazione: la computazione è per definizione un processo atto alla soluzione di un problema, dunque, è orientata alla soluzione di *quel* problema, il quale rappresenta di fatto il contesto operativo del processo computazionale.

Teleologicità: la computazione è per definizione un processo atto alla soluzione di un problema, tant'è che l'insieme dei problemi può essere suddiviso in problemi computabili e non computabili. Se non fosse orientata ad un fine, non sarebbe un processo atto alla soluzione di un problema, il che va in contraddizione con la sua stessa definizione.

L'idea che processi computativi siano coinvolti all'interno dell'agire razionale umano è al centro di alcune proposte teoretiche di *computation rationality* (Lewis et al. 2014; Gershman et al. 2015). Il tentativo percorso in questo paragrafo, sulla scia del pensiero di Turing, intende andare oltre l'idea di processi razionali computativi circoscritti all'ambito dell'uso della razionalità da parte degli esseri umani e intende proporre, sulla base del precedente esperimento mentale e della successiva dimostrazione, che la computazione – in quanto tale – sia una *forma di razionalità*.

Conclusioni

Nel presente articolo ho cercato di evidenziare, attraverso l'analisi dei principali scritti di Turing su computabilità e macchine intelligenti, come l'indagine del matematico inglese possa essere considerata, filosoficamente, come trascendentale.

Non solo essa affronta il tema delle condizioni di possibilità della computazione, e dei suoi limiti, ma affronta l'argomento suddetto e quello delle macchine intelligenti considerando come l'aspetto operativo, attivo, performativo fondi da un lato le condizioni di possibilità della computazione e dall'altro dell'intelligenza macchinica. Sulla scorta dello stretto legame tra computazione e macchine intelligenti ho cercato di approfondire un possibile percorso di indagine riguardante l'ipotesi che la computazione rappresenti una forma di razionalità, concludendo che essa, proprio perché considerata come facoltà attiva, lo sia.

Infine, questa ipotesi vuole aprire un ulteriore dibattito, riassumibile in due domande finali: se la razionalità, in una delle sue forme, può essere computabile, può parimenti esserlo l'intelligenza? E se così fosse, potremmo dire che Turing avrebbe aperto una nuova stagione di *rivoluzione copernicana* della ragion pura?

Bibliografia

- Burgoyne, A.P., Mashburn, C.A., Tsukahara, J.S., Hambrick, D.Z., Engle, R.W. (2023). *Understanding the relationship between rationality and intelligence: a latent-variable approach*, in «Thinking & Reasoning», vol. 29, n. 1, pp. 1–42.
- Casati, R. (2011). *Prima lezione di filosofia*, Laterza, Roma-Bari.
- Church, A. (1936). *A note on the Entscheidungsproblem*, in «The Journal of Symbolic Logic», vol. 1, n. 1, pp. 40–41.
- Copeland, B.J. (2004). *The Essential Turing. Seminal Writings in Computing, Logic, Philosophy, Artificial Intelligence*, Oxford University Press, New York.
- Gershman, S.J., Horvitz, E.J., Joshua, B.T. (2015). *Computational rationality: A converging paradigm for intelligence in brains, minds, and machines*, in «Science», vol. 349, n. 6245, pp. 273–278.
- Grigenti, F. (2021). *Le macchine e il pensiero*, Orthotes, Napoli-Salerno.
- Grigenti, F. (2022). *Alan Turing. Morfogenesi*, in «estetica. studi e ricerche», n. 1/2022.
- Hainscho, T. (2017). *Alan Turing's models of cognition*, https://thweb.at/includes/files/hainscho_turing_koeln_09-2017.pdf
- Hodges, A. (1997). *Turing*, Phoenix, London.
- Kant, I. (1968). *Kritik der reinen Vernunft*, W. de Gruyter, Berlin.
- Lewis, R.L., Howes, A., Singh, S. (2014). *Computational Rationality: Linking Mechanism and Behavior Through Bounded Utility Maximization*, in «Topics in Cognitive Science», vol. 6, n. 2, pp. 279–311.

- McCorduck, P. (2004). *Machines who think: a personal inquiry into the history and prospects of artificial intelligence*, A.K. Peters, Natick (MA).
- McCulloch, W.S., Pitts, W. (1943). *A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity*, in «The bulletin of mathematical biophysics», vol. 5, n. 4, pp. 115–133.
- Nilsson, N.J. (2010). *The Quest for Artificial Intelligence. A History of Ideas and Achievements*, Cambridge University Press.
- Proudford, D. (2024). *Wittgenstein and Turing on AI: Myth versus Reality*, in Ball, B., Helliwell, A.C., Rossi, A. (a cura di), *Wittgenstein and Artificial Intelligence*, Volume I: Mind and Language, Anthem Press.
- Rametta, G. (2014). *Fichte: La Logica Trascendentale Come Logica Del Senso*, in «Rivista di Storia della Filosofia (1984-)», vol. 69, n. 4, pp. 737762.
- Rogers (Jr.), H. (1957). *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, Massachusetts Institute of Technology.
- Shanker, S.G. (1987). *Wittgenstein versus Turing on the nature of Church's thesis*, in «Notre Dame Journal of Formal Logic», vol. 28, n. 4.
- Tamborini, M. (2025). *The ethics of bioinspired animal-robot interaction: A relational meta-ethical approach*, in «Journal of Responsible Technology», vol. 22, pp. 100116.
- Turing, A. M. (1936). *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*, in «Proceedings of the London Mathematical Society», vol. s2-42, n. 1, pp. 230–265.
- Turing, A. M. (1950). *Computing Machinery and Intelligence*, in «Mind», vol. LIX, n. 236, pp. 433–460.
- Turing, A. M. (1952). *The Chemical Basis of Morphogenesis*, in «Philosophical Transactions of the Royal Society of London», vol. 237, n. 641, pp. 37–72.7
- Turing, A. M. (2004). *Intelligent Machinery*, in Copeland, B.J. (a cura di), *The Essential Turing. Seminal Writings in Computing, Logic, Philosophy, Artificial Intelligence*, Oxford University Press, New York, pp. 395–432.
- Wittgenstein, L. (1953). *Philosophische Untersuchungen*, Basil Blackwell, Oxford.
- Wittgenstein, L. (1980). *Remarks on the Philosophy of Psychology*, Basil Blackwell, Oxford.

Turing filosofo trascendentale: computazione, macchine intelligenti e razionalità

In questo articolo si intende mostrare come le opere di Turing, in particolare quelle dedicate alle macchine intelligenti e alla computazione, siano non solo filosoficamente rilevanti, ma anche interpretabili in chiave trascendentale.

L'analisi prende in esame alcuni principali scritti di Turing, evidenziando la costante attenzione ai temi dell'attività in quanto tale e alla possibilità di comprendere l'intelligenza a partire dal punto di vista della performance. A partire da questa analisi, il saggio affronta due concetti di trascendentale presenti nell'opera di Turing: uno radicato nella *Critica della ragion pura* di Kant, e l'altro fondato sulla presupposizione del ruolo trascendentale dell'attività nella formazione dell'intelligenza o la razionalità. Sviluppando ulteriormente questa analisi, l'articolo esplora l'ipotesi secondo cui la computazione costituirebbe esso stessa una forma di razionalità. Attraverso un esperimento mentale, si individuano quattro caratteristiche dell'attività razionale: giustificabilità, produttività, contestualizzazione e orientamento teleologico. Si dimostra come i processi computazionali possiedano necessariamente tutte e quattro queste caratteristiche, suggerendo che la computazione non si limiti a partecipare ai processi razionali, ma costituisca essa stessa una forma di razionalità. Questa interpretazione colloca Turing interprete di una nuova forma di indagine trascendentale sulla razionalità e sull'intelligenza.

PAROLE CHIAVE: Turing, filosofia trascendentale, computazione, intelligenza artificiale, razionalità.

Turing as transcendental philosopher: computation, intelligent machinery and rationality

This article argues that Alan Turing's works, especially those on intelligent machines and computation should be understood as philosophically relevant and should be interpreted as transcendental.

The analysis examines some of Turing's major works, highlighting the consistent focus on activity and on the possibility of understanding intelligence from the perspective of performance. From this analysis, the paper addresses two concepts of transcendental involved in Turing's work: one grounded in Kant's *Critique of Pure Reason* and the other based on the presupposition of the transcendental role of activity in the formation of intelligence or rationality. Building on this analysis, I delve further into the hypothesis that computation itself constitutes a form of rationality.

Through a thought experiment, I establish four characteristics of rational activity: justifiability, productivity, contextualization, and teleological orientation. I demonstrate that computational processes necessarily possess all four characteristics, suggesting that computation is not merely involved in rational processes but constitutes a form of rationality itself.

This interpretation positions Turing as an interpreter of a new transcendental inquiry into rationality and intelligence.

KEYWORDS: Turing, transcendental philosophy, computation, artificial intelligence, rationality.

Nicola Turrini

Abitare l'incomputabile. Alcune considerazioni sul programma di ricerca di Alan Turing

A man provided with paper, pencil, and rubber, and subject to strict discipline, is in effect a universal machine.

A.M. Turing

1. Numeri (non)computabili

“I believe that in about fifty years’ time it will be possible to programme computers, with a storage capacity of about 109, to make them play the imitation game so well that an average interrogator will not have more than 70 per cent. chance of making the right identification after five minutes of questioning”.¹ Così si esprimeva Alan Turing verso la fine degli anni Quaranta, periodo in cui l’idea che i computer digitali avrebbero potuto riprodurre il pensiero umano era chiaramente giunta a maturazione. Com’è noto, nel celebre articolo pubblicato su *Mind* nel 1950, *Computing Machinery and Intelligence*, egli propose il “gioco delle imitazioni” – diventato poi il “Test di Turing” – per misurare l’intelligenza di simili macchine. Sebbene il test sia stato talvolta considerato come una “operational definition of ‘thinking’ or ‘intelligence’ or ‘consciousness’ by means of a sexual guessing game”,² agli occhi del matematico britan-

¹ A.M. Turing, *Computing Machinery and Intelligence*, in “*Mind*”, v. LIX, n. 236, 1950, p. 442.

² Cfr. A. Hodges, *Alan Turing: The Enigma*, Princeton University Press, Princeton-Oxford 2014 p. 523 (edizione ampliata rispetto a quella originale del 1983). Sul test di Turing e sul Pensiero di Turing in generale cfr.: J. Floyd, A. Bokulich (eds.), *Philosophical Explorations of the Legacy of Alan Turing*, Springer, Cham 2017; R.I. Soare, *Turing Computability. Theory and Applications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2016; G. Sommaruga, T. Strahm (eds.), *Turing’s Revolution. The Impact of His Ideas about Computability*, Birkhäuser, Basel 2010; R. Epstein, G. Roberts, G. Beber (eds.), *Parsing the Turing Test. Philosophical and Methodological Issues in the Quest for the Thinking Computer*, Springer, Cham 2009; C. Teuscher (ed.), *Alan Turing: Life and Legacy of a Great Thinker*, Springer, Berlin-Heidelberg 2004.

nico la sua finalità era molto più modesta: esso doveva fornire solamente una condizione sufficiente affinché il “comportamento [behaviour]” di una macchina potesse essere considerato intelligente o pensante.

Turing giunse a queste posizioni a partire dal suo lavoro nel campo della logica matematica iniziato negli anni Trenta; un lavoro che lo aveva portato alla formulazione della Tesi di Church-Turing e del concetto di Macchina di Turing Universale – idee che ebbero successivamente un’influenza fondamentale sul suo pionieristico programma di ricerca sull’intelligenza artificiale. Più in particolare, le idee di Turing sull’intelligenza meccanica affondano le loro radici nel suo interesse per i metodi matematici di dimostrazione da una parte, e per l’analisi delle capacità, dell’ampiezza e dei limiti del ragionamento matematico umano dall’altra. In quegli anni, Kurt Gödel, Alonzo Church e lo stesso Turing avevano infatti dimostrato che nessun insieme finito di regole poteva essere utilizzato per generare tutte le verità matematiche.

Oggi il concetto di computabilità – o ricorsività³ – insieme a una varietà di formulazioni della Tesi di Church-Turing si ritrovano in molti contesti, ben oltre il campo ristretto dell’informatica e delle scienze della computazione; si tratta tuttavia di declinazioni che non esistevano negli anni Trenta, e la cui proiezione sulle idee originali di Turing può portare a fraintendimenti, talvolta significativi. Per seguire lo sviluppo del suo programma di ricerca sull’intelligenza meccanica è essenziale comprendere il lavoro logico che svolse sul concetto di computabilità e di incomputabilità – concetti che, nel pensiero di Turing, rimarranno sempre intimamente connessi – nel suo contesto epistemologico e storico.

La prima formulazione della Tesi di Church-Turing (CTT) da parte di Turing⁴ – nel suo celebre articolo del 1936, *On computable numbers*,

³ Cfr. P. Odifreddi, *Classical Recursion Theory*, North-Holland, Amsterdam 1989.

⁴ La Tesi di Church-Turing prende ovviamente il suo nome dai matematici che la introdussero, per la prima volta, tra gli anni Trenta e gli anni Quaranta: Alonzo Church e Alan Turing. Il lavoro di entrambi su questo tema prese avvio dal tentativo di risolvere l’*Entscheidungsproblem* di David Hilbert e, per affrontare il problema, Church e Turing si preoccuparono di definire rigorosamente il concetto di algoritmo, arrivando indipendentemente agli stessi risultati ma percorrendo strade piuttosto diverse. Nel 1936, Church pubblicò un articolo nel quale definiva il λ -calcolo, e, qualche mese dopo, Turing pubblicò un saggio nel quale introduceva il concetto di Macchina di Turing, del quale poi si servì per dimostrare la non solvibilità dell’*Entscheidungsproblem*. I due matematici giunsero alla conclusione che i sistemi di calcolo automatico che avevano proposto – insieme ad altri che continuavano a venire alla luce, come quello proposto da Emil Post – erano equivalenti sotto il punto di vista della potenza computazionale e quindi che entrambi incarnavano il concetto stesso di algoritmo. Si noti, tuttavia, che sebbene la tesi di Church e la tesi di Turing siano equivalenti in questo senso, hanno comunque significati distinti e sono quindi due tesi diverse. L’approccio generale di Church e di Turing verso l’emergente scienza del calcolo automatico era infatti piuttosto differente: la tesi di Turing riguarda le “computing machines” – la “Turing Machi-

with an application to the Entscheidungsproblem – affermava che i numeri computabili da una Macchina di Turing (TM) “include all numbers which could naturally be regarded as computable”,⁵ o, in altre parole, che qualsiasi calcolo [*computation*] poteva essere effettuato da una TM. I suoi primi lavori sulla (non)computabilità, tuttavia, non implicavano la meccanizzabilità della mente; Turing giunse al problema di come meccanizzare la mente umana, e di come il pensiero potesse essere riprodotto da un computer, solo successivamente.

Le origini dell'articolo del 1936 risalgono probabilmente all'anno precedente, quando Turing frequentò le lezioni sui fondamenti della matematica tenute da Max Newman al King's College di Cambridge. Nel suo *memoir* di Turing per la Royal Society, Newman lega direttamente l'articolo del 1936 al tentativo di dimostrare rigorosamente che il problema della decisione per la logica del primo ordine è irrisolvibile in senso assoluto: “the application he had principally in mind, namely, the breaking down of the Hilbert programme”.⁶ Si tratta, ovviamente, dell'*Entscheidungsproblem* così come era stato formulato alcuni anni prima da David Hilbert nel suo programma di formalizzazione del ragionamento matematico in risposta alla *Grundlagenkrise der Mathematik* di inizio Novecento.⁷ La parte “decisionale” del programma di Hilbert aveva come obiettivo la definizione rigorosa di una procedura generale per decidere la verità o la falsità di un qualsiasi teorema matematico espresso in forma completamente simbolica.

Per dimostrare che non esiste una “procedura effettiva [*effective procedure*]” (un “processo decisionale [*decision process*]”) capace di risolvere l'*Entscheidungsproblem* – e decidere quindi la dimostrabilità logica del primo ordine – Turing aveva bisogno di dare una definizione precisa e adeguata dei concetti intuitivi di “procedura effettiva” e di “calcolabilità effettiva [*effectively calculability*]”, nozioni che i matematici avevano

ne”, come Church stesso la soprannominò nella sua recensione dell'articolo del 1936, mentre quella di Church non menzionava in alcun modo le macchine di calcolo. Cfr. A. Church, *An Unsolvability Problem of Elementary Number Theory*, in “American Journal of Mathematics”, v. 58, n. 2, 1936, pp. 345-363; Id., *A Note on the Entscheidungsproblem*, in “Journal of Symbolic Logic”, v. 1, n. 1, pp. 40-41; Id., *Review: A.M. Turing, On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, in “Journal of Symbolic Logic”, v. 2, n.1, 1937, pp. 42-43.

⁵ A.M. Turing, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, in “Proceedings of the London Mathematical Society”, v. 42, n. 1, 1937, p. 230.

⁶ M.H.A. Newman, *Alan Mathison Turing 1912-1954*, in *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society*, Vol. 1, Nov 1955, The Royal Society Publishing, London, p. 258.

⁷ Cfr. D. Hilbert, W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer, Berlin-Heidelberg 1928. Questo volume conteneva la prima esposizione in assoluto della logica del primo ordine e poneva il problema della sua completezza e decidibilità (*Entscheidungsproblem*).

spesso utilizzato in modo informale per descrivere funzioni calcolabili con metodi, per così dire, cartacei. Come significativamente ricorda Newman, la dimostrazione che Turing aveva in mente era una dimostrazione di impossibilità:

Many were convinced that no such process was possible, but Turing set out to demonstrate the impossibility rigorously. The first step was evidently to give a definition of ‘decision process’ sufficiently exact to form the basis of a mathematical proof of impossibility. To the question ‘What is a ‘mechanical’ process?’ Turing returned the characteristic answer ‘Something that can be done by a machine’, and he embarked on the highly congenial task of analyzing the general notion of a computing machine. It is difficult today to realize how bold an innovation it was to introduce talk about paper tapes and patterns punched in them, into discussions of the foundations of mathematics.⁸

Dimostrare la non solvibilità dell’*Entscheidungsproblem* – un risultato matematico essenzialmente negativo o limitativo – richiedeva di analizzare accuratamente la nozione generale di “computing machine”, nozione che Turing ha dovuto costruire praticamente da zero. Ed è precisamente in questo processo di definizione che le nozioni di computabilità e incomputabilità si saldano insieme: Turing raggiunge la prima solo dopo aver trovato la seconda.

2. Computabilità e macchine

Quando discuteva della nozione di “calcolo [*computation*]”, Turing intendeva sequenze di operazioni su simboli logici o matematici eseguite da esseri umani (o da dispositivi meccanici) secondo un numero finito di regole, senza l’intervento di intuizioni, creatività o ipotesi e la cui esecuzione generava sempre la soluzione corretta attraverso un numero finito di *step*.⁹ Il termine “calcolo” non si riferiva quindi a tutto ciò che

⁸ M.H.A. Newman, *Alan Mathison Turing 1912-1954*, cit., p. 256.

⁹ La terminologia utilizzata da Turing per spiegare il concetto intuitivo di “procedura effettiva” è piuttosto variegata ma sempre consistente: “computable” come “calculable by finite means” (A.M. Turing, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, cit., p. 231), “effectively calculable” (Ivi, p. 263), “The class of problems capable of solution by the machine [...] are those problems which can be solved by human clerical labour, working to fixed rules, and without understanding” (A.M. Turing [1945], *Proposal for Development in the Mathematical Division of an Automatic Computing Engine (ACE)*, in B.E. Carpenter; R.W. Doran (eds.), *A.M. Turing’s ACE Report of 1946 and Other Papers*, MIT Press, Cambridge MA, 1986, pp. 38-39), “‘rule of thumb’ or ‘purely mechanical’” (A.M. Turing, *Intelligent Machinery*,

un matematico o una mente umana (o una macchina) potevano fare ma delimitava un'area specifica di operazioni mentali (o meccaniche). Il suo lavoro logico sulla (non)computabilità deve essere compreso nel contesto storico degli anni Trenta, quando non esistevano né computer digitali funzionanti né le scienze cognitive: a quel tempo, un "computer" era semplicemente una persona che eseguiva dei calcoli con l'ausilio di carta, matita e gomma.¹⁰

Turing utilizzava il termine "meccanico" come sinonimo di "effettivamente calcolabile": "A function is said to be 'effectively calculable' if its values can be found by some purely mechanical process".¹¹ Questa osservazione – se ci atteniamo alle spiegazioni di Turing – è legata al punto essenziale per cui il significato dei simboli non doveva influenzare i calcoli né avere alcun ruolo nell'esecuzione di una procedura efficace.

La spiegazione che Turing dà della nozione di calcolabilità effettiva in termini puramente meccanici non era inoltre intesa a tracciare una distinzione rispetto a procedure effettive ma non meccaniche, come fece Gödel alcuni anni più tardi; come ha sottolineato Gualtiero Piccinini, Turing non aveva infatti alcuna nozione di procedura efficace non meccanica, e affermare che la definizione fosse limitata alle procedure meccaniche – in contrapposizione a quelle non meccaniche – lo coinvolge in un dibattito iniziato dopo la sua epoca.¹²

Nella tesi di dottorato del 1939, Turing precisò il termine "effettivamente calcolabile" in questo modo:

testo pubblicato postumo in C.R. Evans, A.D.J. Robertson (eds.), *Cybernetics: Key Papers*, Butterworths, London 1968, p. 7), "definite rule of thumb process which could have been done by a human operator working in a disciplined but unintelligent manner" (A.M. Turing, *Programmers' Handbook for the Manchester Electronic Computer Mark II*, with errata sheets 28 Mar. and 9 Jul. 1951, and Programme sheets, 1951, Contemporary Scientific Archives Centre, King's College Library, Cambridge, AMT-B-32: <https://turingarchive.kings.cam.ac.uk/publications-lectures-and-talks-amtb/amt-b-32>).

¹⁰ Esistevano alcune macchine di calcolo piuttosto sofisticate come i computer analogici. Turing era di certo a conoscenza dell'analizzatore differenziale di Manchester e, come ricorda Hodges, aveva in mente di utilizzarlo per trovare i valori della funzione zeta di Riemann (cfr. Cfr. A. Hodges, *Alan Turing: The Enigma*, cit., p. 179).

¹¹ A.M. Turing, *Systems of Logic Based on Ordinals*, in "Proceedings of the London Mathematical Society", Series 2, v. 45, 1939, p. 166.

¹² Cfr. G. Piccinini, *Alan Turing and the Mathematical Objection*, in "Minds and Machines" v. 13, 2003, p. 27; si veda anche G. Piccinini, *Computationalism, The Church-Turing Thesis, and The Church-Turing Fallacy*, in "Synthese", v. 154, 2007, pp. 97-120. Negli anni Sessanta Gödel ipotizzò la possibilità di definire procedure efficaci ma non meccaniche da distinguere dalle procedure meccaniche efficaci analizzate da Turing; una procedura efficace non meccanica avrebbe a suo avviso consentito al significato dei simboli di determinarne il risultato (cfr. K. Gödel, *Postscriptum to 'On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems'*, in M. Davis (ed.), *The Undecidable*, Raven Press, New York 1965, pp. 72-73).

We shall use the expression ‘computable function’ to mean a function calculable by a machine, and we let ‘effectively calculable’ refer to the intuitive idea without particular identification with any one of these definitions. We do not restrict the values taken by a computable function to be natural numbers; we may for instance have computable propositional functions.¹³

In questo passo Turing sta cercando di spiegare il significato intuitivo di “effettivamente calcolabile” in termini di processi meccanici. Il termine “mechanical process”, utilizzato prima in modo intuitivo, viene poi identificato con la computabilità delle macchine di Turing:

We may take this statement literally, understanding by a purely mechanical process one which could be carried out by a machine. It is possible to give a mathematical description, in a certain normal form, of the structures of these machines. The development of these ideas leads to the author’s definition of a computable function, and an identification of computability with effective calculability.¹⁴

Si tratta, in effetti, di un passo in avanti rispetto all’articolo del 1936, dove Turing aveva introdotto la nozione intuitiva di numeri computabili non come quei numeri che erano computabili mediante un processo meccanico, ma come quei numeri “may be described briefly as the real numbers whose expressions as a decimal are calculable by finite means”.¹⁵

3. Le Macchine di Turing

La nozione formale di Macchina di Turing entra in gioco proprio per definire rigorosamente il concetto di calcolabilità effettiva: una procedura è effettiva solo se può essere eseguita da una macchina di Turing. In questo caso, anche il termine “macchina” richiede di essere precisato. A seguito dell’articolo del 1936, i matematici più vicini a Turing interpretarono il suo articolo come una teoria generale della computabilità, che stabiliva cosa potesse e cosa non potesse essere calcolato, non solo dagli esseri umani ma

¹³ A.M. Turing, *Systems of Logic Based on Ordinals*, cit., p. 166 (cfr. anche Id., *Computability and [un]definability*, in “Journal of Symbolic Logic”, v. 2, n. 4, 1937, p. 153).

¹⁴ *Ibidem*. Cfr. anche A.M. Turing, *Lecture to the London Mathematical Society on 20 February 1947*, in B.E. Carpenter; R.W. Doran (eds.), *A.M. Turing’s ACE Report of 1946 and Other Papers*, cit., p. 107: “One of my conclusions was that the idea of a ‘rule of thumb’ process and a ‘machine process’ were synonymous. The expression ‘machine process’ of course means one which could be carried out by the type of machine I was considering”.

¹⁵ A.M. Turing, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, cit., p. 230.

anche dai dispositivi meccanici;¹⁶ solo successivamente, diversi autori adottarono una posizione più restrittiva. Dato che l'obiettivo dell'articolo del 1936 era stabilire un limite a ciò che poteva essere ottenuto in matematica con metodi di prova effettivi, è chiaro che le macchine di Turing rappresentavano almeno le capacità computazionali degli esseri umani: le operazioni eseguite da queste macchine erano infatti determinate da un elenco di istruzioni che dovevano essere comprensibili in modo non ambiguo dagli esseri umani – che, dopotutto, avevano il compito di programmarle.

Leggendo l'articolo del 1936 ci si imbatte di frequente in descrizioni antropomorfe delle macchine, che Turing introduceva solitamente tra virgolette, molto probabilmente per indicarne l'uso metaforico: macchine che “scansionano [*scan*]” il nastro, “vedono [*see*]” simboli e sono dotate di “memoria [*memory*]” e “stati mentali [*states of mind*]”.¹⁷ L'utilizzo di simili figure del linguaggio negli scritti di Turing non è tuttavia una mera cifra stilistica: se è certamente vero che il suo stile argomentativo era piuttosto eccentrico rispetto ai matematici del suo tempo (e del nostro a dire il vero), l'uso di metafore non assume mai una funzione puramente evocativa ma svolge il ruolo di presentare al lettore precise questioni teoriche. Lo stesso Turing sembra per altro essere ben consapevole che la stessa macchina di Turing, al di là del suo statuto di modello formale rigoroso, funzioni anche come un paradigma metaforico.

Anche in questo caso, il punto è l'essenziale riferimento all'esecuzione, da parte di un computer umano, di una procedura effettiva in cui il significato non doveva avere alcun ruolo. Le macchine di Turing non erano descritte come capaci di comprendere le istruzioni, né tantomeno come dotate di intelligenza: una TM è insensibile al significato o, se si vuole, semanticamente vuota. Se l'esecuzione di un calcolo “significativo” – piuttosto che di un processo fisico “privo di significato” – presupponesse la comprensione

¹⁶ Cfr. ad esempio A. Church, *Review: A.M. Turing, On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, cit., e Id., *Introduction to Mathematical Logic*. Vol. 1, Princeton University Press, Princeton 1956, n. 119, p. 52: “The notion of effectiveness may also be described by saying that an effective method of computation, or algorithm, is one for which it would be possible to build a computing machine”. Si veda anche A.G.D. Watson, *Mathematics and Its Foundations*, in “Mind”, v. 47, n. 188, 1938, pp. 448 ss., M.H.A. Newman, *Alan Mathison Turing*, cit., p. 258). Secondo Kleene, “Turing's formulation comprises the functions computable by machines” (S.C. Kleene, *On Notation for Ordinal Numbers*, in “Journal of Symbolic Logic” v. 3, n. 4, 1938, pp. 150). Lo stesso John von Neumann pose, definendo la sua teoria degli automi finiti, identificò il problema affrontato da Turing come quello di dare “a general definition of what is meant by a computing automaton” (J. von Neumann, *The General and Logical Theory of Automata*, in Id. *Collected Works*. Vol. 5: *Design of Computers, Theory of Automata and Numerical Analysis*, Pergamon Press, London 1963, p. 313).

¹⁷ Cfr. A.M. Turing, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, cit., pp. 117-118.

delle istruzioni, si dovrebbe concludere che solo gli esseri umani eseguono calcoli autentici. Una TM – in quanto “computing machine” – è piuttosto una rappresentazione astratta e idealizzata di un essere umano nell’atto del calcolo. È probabilmente il fraintendimento di questo punto che, tra gli altri, ha indotto alcuni autori a fornire un’interpretazione restrittiva della proposta di Turing, secondo cui la sua teoria riguarderebbe esclusivamente la (non)computabilità da parte degli esseri umani e non delle macchine. In questa prospettiva le macchine di Turing sarebbero allora – riprendendo un’espressione di Ludwig Wittgenstein – “humans who calculate”.¹⁸

Queste interpretazioni sono in aperto contrasto con l’uso esplicito che Turing fa dei termini “calcolo” e “macchina”. Nonostante egli abbia insistito sul fatto che le sue macchine potessero imitare qualsiasi routine umana, non affermò mai che tali macchine dovessero essere considerate come esseri umani astratti. Turing ha sempre considerato il calcolo come una manipolazione fisica dei simboli e la TM fu introdotta per definire matematicamente tale processo di manipolazione nel modo più rigoroso ed esatto possibile. Secondo l’uso che ne faceva Turing erano piuttosto le TM a diventare esse stesse dei dispositivi meccanici idealizzati, modelli formali di un processo di calcolo eminentemente fisico e pratico. È proprio in quanto modelli puramente formali che tali macchine – e le loro limitazioni – potevano essere studiate dal punto di vista matematico: il loro comportamento laplaciano era infatti definito con precisione in termini di operazioni discrete ed effettive.

4. L’implementazione fisica della macchina di Turing universale

Turing aveva probabilmente intravisto la possibilità di implementare fisicamente la sua macchina universale già nel 1935.¹⁹ Nel 1947, durante

¹⁸ Cfr. L. Wittgenstein, *Remarks on the Philosophy of Psychology. Bemerkungen über die Philosophie der Psychologie*, Vol. 1, G.E.M. Anscombe, G.H. von Wright (eds.), Blackwell, Oxford 1980, § 1096. Wittgenstein conosceva Turing, che frequentò il suo corso sui fondamenti della matematica nel 1939. Sui loro diversi punti di vista si vedano S.G. Shanker, *Wittgenstein versus Turing on the Nature of Church’s Thesis*, in “Notre Dame Journal of Formal Logic”, v. 28, n. 4, 1987, pp. 615-649 e D. Proudfoot, B.J. Copeland, *Turing, Wittgenstein and the Science of the Mind*, in “Australasian Journal of Philosophy”, v. 72, n. 4, 1994, pp. 497-519. Su questo punto, Robin Gandy è stato molto più radicale di Wittgenstein: “*Turing’s analysis makes no reference whatsoever to calculating machines. Turing machines appear as a result, as a codification, of his analysis of calculations by humans*” (R. Gandy, *The Confluence of Ideas in 1936*, in R. Henken (ed.), *The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey*, Oxford University Press, Oxford 1988, pp. 83-84). La lettura di Gandy è di certo pertinente ma non sembra cogliere il ruolo essenziale che tale codifica assumeva nell’argomentazione di Turing.

¹⁹ Cfr. M.H.A. Newman, *Obituary Notice for Alan Turing*, in “The Times”, 16 June 1954. Questo aspetto è particolarmente evidente nel *resumé* che Turing preparò per la rivista

un intervento presso la London Mathematical Society, egli riprese il lavoro del 1936 come contenente il progetto di un computer digitale universale e come teoria che stabiliva l'efficacia e i limiti delle nuove macchine di calcolo:

Some years ago I was researching on what might now be described as an investigation of the theoretical possibilities and limitations of digital computing machines. I considered a type of machine which had a central mechanism, and an infinite memory which was contained on an infinite tape. This type of machine appeared to be sufficiently general. One of my conclusions was that the idea of a 'rule of thumb' process and a 'machine process' were synonymous [...]. Machines such as the ACE may be regarded as practical versions of this same type of machine.²⁰

Per Turing, una TM non era quindi una mera idealizzazione matematica di alcune capacità cognitive della mente umana: essa doveva essere propriamente intesa come un dispositivo meccanico ipotetico, dotato di un funzionamento specifico. Inoltre, egli riteneva che le sue macchine

francese *Comptes Rendues* e che conteneva una descrizione sintetica dei risultati del suo articolo del 1936. In questa sede la definizione di "computable" e il risultato principale sono puntualmente espressi in termini di macchine e gli esseri umani non vengono menzionati in alcun modo: "On peut appeler 'computable' les nombres dont les décimales se laissent écrire par une machine. [...] On peut démontrer qu'il n'y a aucun procédé général pour décider si une machine *m* n'écrit jamais le symbole 0" (A.M. Turing, Typescript copy made by Mrs Turing of first rough draft of précis of 'Computable Numbers', made for *Comptes Rendues*, 1936, Contemporary Scientific Archives Centre, King's College Library, Cambridge, AMT-K-4: <https://turingarchive.kings.cam.ac.uk/material-given-kings-college-cambridge-1960-amtk/amt-k-4>).

²⁰ A.M. Turing, *Lecture to the London Mathematical Society on 20 February 1947*, cit., pp. 106-107. Inoltre, nel testo del 1948, *Intelligent Machinery*, le macchine di Turing sono considerate "chiefly of interest when we wish to consider what a machine could in principle be designed to do" (A.M. Turing, *Intelligent Machinery*, cit., p. 6). In questo articolo, è piuttosto evidente che Turing, più che descrivere le sue macchine logiche come esseri umani che calcolano, pensi invece gli esseri umani come computer digitali universali: "It is possible to produce the effect of a computing machine by writing down a set of rules of procedure and asking a man to carry them out. Such a combination of a man with written instructions will be called a 'Paper Machine.' A man provided with paper, pencil, and rubber, and subject to strict discipline, is in effect a universal machine (ivi, p. 9). Cfr. anche A.M. Turing, *Can digital computers think?*, Typescript with AMS annotations of a talk broadcast on BBC Third Programme, 15 May 1951, Contemporary Scientific Archives Centre, King's College Library, Cambridge, AMT-B-5: <https://turingarchive.kings.cam.ac.uk/publications-lectures-and-talks-amtb/amt-b-5>: "A digital computer is a universal machine in the sense that it can be made to replace [...] any rival design of calculating machine, that is to say any machine into which one can feed data and which will later print out results". Ciò suggerisce per altro che, per Turing, qualsiasi dispositivo matematicamente definito come in grado di fornire i valori di una funzione non calcolabile, cioè una funzione che nessuna TM potrebbe calcolare – come le "oracle machines" descritte nella tesi del 1939 – non potrebbe essere implementato fisicamente.

logiche definissero – e, di conseguenza, delimitassero – la potenza di calcolo di una qualsiasi macchina, e quindi ciò che essa poteva o non poteva fare. Questa posizione, tuttavia, non implicava che ogni sistema fisico fosse una macchina di Turing o potesse essere imitato da una di esse; ad esempio, il risultato di un ipotetico processo casuale non poteva essere replicato da nessuna TM, ma solo da una macchina contenente un “elemento casuale”.²¹

La Tesi di Church-Turing ha indotto Turing a passare dall’idealizzazione di un essere umano che calcola all’idea di un dispositivo meccanico immaginario ma formalmente possibile. Come ha mostrato Rodney Brooks, dopo il 1936 Turing modificò gradualmente la natura dell’astrazione su cui stava lavorando: dalle macchine universali del suo articolo del 1936 – ancora oggi il modello essenziale per tutti i moderni computer digitali – a semplici meccanismi computazionali adattabili che potevano apprendere autonomamente, e che erano concepiti come elementi computazionali attivi. In quest’ultimo caso, il modello utilizzato si ispirava evidentemente al cervello.²²

In questa direzione dovrebbero essere stabilite le implicazioni e la portata della tesi di Church-Turing, secondo cui i numeri calcolabili da una macchina di Turing includono tutti i numeri “which could na-

²¹ A.M. Turing, *Intelligent Machinery*, cit., p. 9; cfr. Anche A.M. Turing, *Computing Machinery and Intelligence*, cit., p. 438.

²² Cfr. R. Brooks, *The Case for Embodied Intelligence*, in S.B. Cooper, J. van Leeuwen, (eds.), *Alan Turing. His Work and Impact*, Elsevier, Amsterdam 2012, p. 499; riportiamo integralmente l’analisi particolarmente lucida di Brooks: “For me Alan Turing’s 1948 paper *Intelligent Machinery* was more important than his 1950 paper *Computing Machinery and Intelligence*. [...] The bulk of the paper gives examples of how simple computational mechanisms could be adaptable, could be taught, and could learn for themselves. The examples and mechanisms Turing used in this exposition where networks of active computational elements. Although he connected them back to the universal machines of his 1937 paper, it is remarkable in hindsight, how different this abstraction was than the one that he had previously introduced, of the central processing element with a tape memory – still the essential model for all modern digital computers. Here, instead, he used a model inspired by brains. One can only wonder how different our technological world might be if Turing had lived to fully develop this set of ideas himself. Others carried on this second tradition, but one must think that perhaps Turing’s intellectual influence might have been stronger as he would have been arguing against the approach that was adopted from his earlier work. For me, the critical, and new, insights in *Intelligent Machinery* were two fold. First, Turing made the distinction between embodied and disembodied intelligence. While arguing that building an embodied intelligence would be a ‘sure’ route to produce a thinking machine he rejected it in favor of disembodied intelligence on the grounds of technical practicalities of the era. Second, he introduced the notion of ‘cultural search’, that people’s learning largely comes from the culture of other people in which they are immersed. Modern researchers are now seriously investigating the embodied approach to intelligence and have rediscovered the importance of interaction with people as the basis for intelligence”.

turally be regarded as computable”.²³ Per stabilire la Tesi di Church-Turing, Turing aveva paragonato “a man in the process of computing a real number to a machine”,²⁴ costruendo così la sua argomentazione sui limiti cognitivi che condizionano un essere umano che esegue operazioni di calcolo. All’inizio di *On Computable Numbers* si legge che “the justification [of CTT] lies in the fact that the human memory is necessarily limited”.²⁵ Nell’argomentazione Turing utilizza – non a caso – i limiti sensoriali per giustificare la sua restrizione a un numero finito di simboli primitivi, e i limiti della memoria per giustificare la sua restrizione a un numero finito di “stati mentali”.²⁶

Questo tipo di argomentazioni a favore della Tesi di Church-Turing rispondono – come spesso accade nello stile argomentativo del matematico britannico – a considerazioni limitative. Detto altrimenti, la CTT non implica che tutte le operazioni di una mente umana siano computabili da una TM; Turing non ha mai affermato qualcosa di simile. La sua idea era, in fondo, molto più modesta: le operazioni di una TM “include all those which are used in the computation of a number” da un essere umano.²⁷ Poiché il concetto di processo umano di calcolo è, come quello di calcolabilità effettiva, essenzialmente intuitivo, Turing poteva affermare che “all arguments which can be given are bound to be, fundamentally, appeals to intuition, and for this reason rather unsatisfactory mathematically”.²⁸ Un altro modo per dire che la tesi di Church-Turing non era un teorema matematico ma piuttosto “something between a theorem and a definition”.²⁹

²³ A.M. Turing, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, cit., p. 116. La generalità della terminologia di Turing, che si chiede “What are the possible processes which can be carried out in computing a number?” (ivi, p. 135), e la conclusione a cui voleva giungere, cioè l’assoluta non solvibilità dell’*Entscheidungsproblem*, sono un’ulteriore prova del fatto che né la nozione di Gödel di “procedura efficace ma non meccanica” né l’ipotesi di una macchina di calcolo più potente delle TM avevano qui alcun senso. Se esistessero procedure efficaci non meccaniche, cioè macchine che calcolano funzioni non calcolabili, forse una di esse potrebbe risolvere l’*Entscheidungsproblem*; ma secondo Turing il problema della decisione non può avere alcuna soluzione (ivi, p. 117). Su questo si veda G. Piccinini, *Alan Turing and the Mathematical Objection*, cit., pp. 26-27.

²⁴ Ivi, p. 117

²⁵ *Ibidem*.

²⁶ Cfr. ivi, pp. 135-136.

²⁷ Ivi, p. 118.

²⁸ Ivi, p. 135.

²⁹ A.M. Turing 1954 *Solvable and Unsolvable Problems*, in “Science News”, n. 31, 1954, pp. 7-23. La tesi di Church-Turing è generalmente considerata una tesi non dimostrabile per la quale esistono prove convincenti. Per un’attenta analisi dei “disaccordi” sulla dimostrabilità della tesi si veda J. Folina, *Church’s Thesis: Prelude to a Proof*, in “Philosophia Mathematica”, v. 6, n. 3, 1998, pp. 302-323.

5. Thinking is (not) an effective procedure

Dall'articolo del 1936 Turing trasse l'idea che le procedure effettive potevano essere eseguite dalle sue macchine; questo valeva non solo per procedure che operavano su simboli matematici, ma per qualsiasi procedura simbolica che fosse effettiva. Un aspetto particolarmente rilevante dell'universalità della TM era che, in linea di principio, potevano essere implementati anche programmi difettosi – che portavano a calcoli che non si arrestavano mai – e in generale programmi di cui non era possibile decidere a priori quali input portassero a un calcolo corretto; purché, ovviamente, tali procedure fossero definite in modo esaustivo da un insieme finito di istruzioni. Si tratta del ben noto Problema della fermata [*Halting Problem*] che, come Turing stesso ha dimostrato, risulta essere anch'esso irrisolvibile. L'insieme degli input che portano a un calcolo che termina è un insieme numerabile in modo ricorsivo, cioè è possibile implementare progressivamente la serie di tutti i calcoli possibili e osservare quali producono un risultato; questo permette di enumerare gli input per cui la macchina si ferma, ma questo insieme non è a sua volta un insieme computabile, poiché non si può mai essere certi che un calcolo in corso, un giorno, non avrà successo.

Se dotata delle tavole di istruzioni appropriate, una macchina universale poteva eseguire tutti questi processi. Si trattava di una tesi di grande forza speculativa, ma per nulla equivalente alla tesi – sostenuta ad esempio da Stuart C. Shanker – secondo cui “thinking is an effective procedure”.³⁰ In *On Computable Numbers* Turing non sosteneva che il pensiero umano potesse essere totalmente meccanizzato: al contrario, il

³⁰ Secondo Shanker, era questa l'idea di Turing (cfr. S.G. Shanker, *Turing and the Origins of AI*, in “*Philosophia Mathematica*”, v. 3, n. 1, 1995, p. 55). Turing, tuttavia, non ha mai fatto una simile affermazione. Cfr. W. Sieg, J. Byrnes, *K-graph Machines: Generalizing Turing's Machines and Arguments*, in P. Hájek (ed.), *Gödel '96: Logical Foundations of Mathematics, Computer Science and Physics – Kurt Gödel's Legacy*, Springer, Berlin 1996, p. 117; Sieg e Byrnes difendono giustamente l'idea che Turing non abbia mai sostenuto che i processi mentali non possano andare oltre quelli meccanici: “First, Turing analyzed *mechanical* processes of a human computer. The reduction of string machines or of K-graph machines to letter machines over a two-element alphabet does not show that *mental* processes cannot go beyond mechanical ones; it only shows that Turing machines can serve as a “normal form” for machines, because of the simplicity of their description”. Nella nota 13 illustrano lucidamente il motivo per cui le macchine di Turing sono particolarmente utili per l'analisi metamatematica e le esigenze della *proof theory*: “For this reason Turing machines are most suited for theoretical investigations. This state of affairs is analogous to that involving logical calculi: natural deduction calculi reflect quite directly the structure of ordinary arguments, but have a somewhat involved metamathematical description; in contrast, axiomatic logical systems are not suited as frameworks for direct formalizations, but – due to their simple description – are most suitable for metamathematical investigations”.

pensiero in quanto tale non può essere integralmente ridotto a procedura efficace.

In fondo, è la consapevolezza degli effetti limitativi legati alla non computabilità ad essere al centro della dimostrazione che nessuna macchina di Turing – e quindi nessun metodo uniforme ed effettivo –³¹ era in grado di risolvere il problema decisionale della logica del primo ordine. Turing aggiunse anche che un processo non uniforme poteva generare una sequenza non computabile, ovvero una sequenza che nessuna macchina di Turing sarebbe stata in grado di generare. In un passaggio poco commentato di *On Computable Numbers* Turing definisce una certa sequenza binaria infinita δ , che dimostra essere non calcolabile, e afferma: “It is (so far as we know at present) possible that any assigned number of figures of δ can be calculated, but not by a uniform process. When sufficiently many figures of δ have been calculated, an essentially new method is necessary in order to obtain more figures”.³²

I processi non uniformi, che generano oggetti matematici non computabili, compaiono sotto diverse forme nei lavori successivi di Turing sui fondamenti della matematica, sull'intelligenza artificiale e sulla morfogenesi, e hanno segnato in modo significativo il suo programma di ricerca sull'intelligenza artificiale. Se alcuni hanno messo in discussione la definizione di “teoria della computabilità” per la disciplina che Turing fondò negli anni Trenta insieme a Gödel, Church, Post e Kleene, è forse perché in essa il ruolo svolto dalla non computabilità e dalla non uniformità è essenziale.³³ Turing è stato un matematico che si è confrontato con i problemi del suo tempo e che ha cercato di dare sostanza matematica ai processi fisici e mentali, fornendoci il modello essenziale di ciò che oggi intendiamo per computazione. Osservò la computabilità come un'unità organica con l'incomputabilità, scoprendo quest'ultima come un'estensione della teoria della definibilità del teorema di incompletezza di Gödel; e, come ha giustamente affermato Barry Cooper “He encouraged us to see the universe as something that does compute and to engage with its features,

³¹ In questo contesto, un metodo di calcolo uniforme si riferisce al fatto che la macchina utilizza un insieme identico di regole o istruzioni indipendentemente dalle caratteristiche dell'*input* (come ad esempio le dimensioni), un concetto che Turing utilizzò per formalizzare il calcolo e successivamente esplorare la teoria della computazione. In un metodo di calcolo non uniforme, la macchina potrebbe ricevere nuove informazioni aggiuntive esterne al proprio insieme di istruzioni. In questa direzione si muove la tesi del 1939 sulle logiche ordinali. Sulla rilevanza dei “processi non uniformi” cfr. G. Piccinini, *Alan Turing and the Mathematical Objection*, cit.

³² A.M. Turing, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, cit., p. 253.

³³ Sulla rilevanza della nozione di “incomputabile” cfr. S. Barry Cooper, M.I. Soskova (eds.), *The Incomputable Journeys Beyond the Turing Barrier*, Springer, Cham 2017.

tracing embodied analogues of his halting problem within biology and neuroscience”.³⁴

Nonostante l'apparente disincarnazione del lavoro del 1936 – che aveva motivazioni tecniche, matematiche e concettuali – successivamente, sin dai suoi anni a Bletchley Park, Turing si occupò in molti modi di quella che potremmo definire “embodied and disembodied intelligence”.³⁵ Implicito, in questo senso dell'incarnazione, è il riconoscimento di una differenza nel modo in cui gli esseri umani – e le macchine intelligenti in generale – interagiscono con le informazioni, ovvero vi sono immersi: “What we want is a machine that can learn from experience. The possibility of letting the machine alter its own instructions provides the mechanism for this”³⁶ ricordava Turing nel 1947. Questa interazione è considerata come un attributo necessario dell'intelligenza, ma solo se ricordiamo che quest'ultima non è solo “disciplina” ma anche “iniziativa”:³⁷ “if a machine is expected to be infallible, it cannot also be intelligent”.³⁸

Bibliografia

- Barry Cooper, S., Soskova M.I. (eds.), *The Incomputable Journeys Beyond the Turing Barrier*, Cham, Springer, 2017.
- Barry Cooper, S., van Leeuwen, J. (eds.), *Alan Turing. His Work and Impact*, Amsterdam, Elsevier, 2012.
- Barry Cooper, S., *Incomputability after Alan Turing*, in “Notices of the AMS”, v. 59, n. 6, 2012, pp. 776-784.
- Brooks, R., *The Case for Embodied Intelligence*, in S.B. Cooper, J. van Leeuwen, (eds.), *Alan Turing. His Work and Impact*, Amsterdam, Elsevier, 2012.
- Church, A., *An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory*, in “American Journal of Mathematics”, v. 58, n. 2, 1936, pp. 345-363.
- Church, A., *A Note on the Entscheidungsproblem*, in “Journal of Symbolic Logic”, v. 1, n. 1, pp. 40-41.

³⁴ S. Barry Cooper, *Incomputability after Alan Turing*, in “Notices of the AMS”, v. 59, n. 6, 2012, p. 783. L'articolo del 1952 dedicato alla morfogenesi è, in questo senso, esemplificativo; cfr. A.M. Turing, Alan, *The Chemical Basis of Morphogenesis*, in “Philosophical Transactions of the Royal Society of London B”, v. 237, n. 641, 1952, pp. 37-72.

³⁵ Cfr. R. Brooks, *The Case for Embodied Intelligence*, cit.

³⁶ A.M. Turing, *Lecture to the London Mathematical Society on 20 February 1947*, cit., p. 123.

³⁷ Cfr. A.M. Turing, *Intelligent Machinery*, cit., p. 9: “If the untrained infant's mind is to become an intelligent one, it must acquire both discipline and initiative. So far we have been considering only discipline. To convert a brain or machine into a universal machine is the extremest form of discipline. [...] But discipline is certainly not enough in itself to produce intelligence. That which is required in addition we call initiative. This statement will have to serve as a definition. Our task is to discover the nature of this residue as it occurs in man, and try to copy it in machines”.

³⁸ A.M. Turing, *Lecture to the London Mathematical Society on 20 February 1947*, cit, p. 124.

- Church, A., *Introduction to Mathematical Logic*. Vol. 1, Princeton, Princeton University Press, 1956.
- Church, A., Review: A.M. Turing, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, in "Journal of Symbolic Logic", v. 2, n.1, 1937, pp. 42-43.
- Epstein, R., Roberts, G., Beber G., (eds.), *Parsing the Turing Test. Philosophical and Methodological Issues in the Quest for the Thinking Computer*, Cham, Springer, 2009.
- Floyd, J., Bokulich A., (eds.), *Philosophical Explorations of the Legacy of Alan Turing*, Cham, Springer, 2017.
- Folina, J., *Church's Thesis: Prelude to a Proof*, in "Philosophia Mathematica", v. 6, n. 3, 1998, pp. 302-323.
- Gandy, R., *The Confluence of Ideas in 1936*, in R. Henken (ed.), *The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey*, Oxford, Oxford University Press, 1988.
- Gödel, K., *Postscriptum to 'On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems'*, in M. Davis (ed.), *The Undecidable*, New York, Raven Press, 1965.
- Hilbert, D., Ackermann, W., *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlin-Heidelberg, Springer, 1928.
- Hodges, A., *Alan Turing: The Enigma*, Princeton-Oxford, Princeton University Press, 2014.
- Kleene, S.C., *On Notation for Ordinal Numbers*, in "Journal of Symbolic Logic" v. 3, n. 4, 1938, pp. 150-155.
- Newman, M.H.A., *Alan Mathison Turing 1912-1954*, in *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society*, Vol. 1, Nov 1955, London, The Royal Society Publishing.
- Newman, M.H.A., *Obituary Notice for Alan Turing*, in "The Times", 16 June 1954.
- Odifreddi, P., *Classical Recursion Theory*, Amsterdam, North-Holland, 1989.
- Piccinini, G., *Computationalism, The Church-Turing Thesis, and The Church-Turing Fallacy*, in "Synthese", v. 154, 2007, pp. 97-120.
- Piccinini, G., *Alan Turing and the Mathematical Objection*, in "Minds and Machines" v. 13, 2003, pp. 23-48.
- Proudfoot, D., Copeland, B.J., *Turing, Wittgenstein and the Science of the Mind*, in "Australasian Journal of Philosophy", v. 72, n. 4, 1994, pp. 497-519.
- Shanker, S.G., *Turing and the Origins of AI*, in "Philosophia Mathematica", v. 3, n. 1, 1995, pp. 52-85.
- Shanker, S.G., *Wittgenstein versus Turing on the Nature of Church's Thesis*, in "Notre Dame Journal of Formal Logic", v. 28, n. 4, 1987, pp. 615-649.
- Sieg, W., Byrnes, J., *K-graph Machines: Generalizing Turing's Machines and Arguments*, in P. Hájek (ed.), *Gödel '96: Logical Foundations of Mathematics, Computer Science and Physics – Kurt Gödel's Legacy*, Berlin, Springer, 1996.
- Soare, R.I., *Turing Computability. Theory and Applications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2016.
- Sommaruga, G., Strahm T., (eds.), *Turing's Revolution. The Impact of His Ideas about Computability*, Basel, Birkhäuser, 2010.
- Teuscher (ed.), C., *Alan Turing: Life and Legacy of a Great Thinker*, Berlin-Heidelberg, Springer, 2004.

- Turing, A.M., *Solvable and Unsolvable Problems*, in "Science News", n. 31, 1954, pp. 7-23.
- Turing, A.M., *The Chemical Basis of Morphogenesis*, in "Philosophical Transactions of the Royal Society of London B", v. 237, n. 641, 1952, pp. 37-72.
- Turing, A.M., *Programmers' Handbook for the Manchester Electronic Computer Mark II, with errata sheets 28 Mar. and 9 Jul. 1951, and Programme sheets, 1951*, Contemporary Scientific Archives Centre, King's College Library, Cambridge, AMT-B-32: <https://turingarchive.kings.cam.ac.uk/publications-lectures-and-talks-amtb/amt-b-32>).
- Turing, A.M., *Can digital computers think?*, Typescript with AMS annotations of a talk broadcast on BBC Third Programme, 15 May 1951, Contemporary Scientific Archives Centre, King's College Library, Cambridge, AMT-B-5: <https://turingarchive.kings.cam.ac.uk/publications-lectures-and-talks-amtb/amt-b-5>.
- Turing, A.M., *Computing Machinery and Intelligence*, in "Mind", v. LIX, n. 236, 1950, pp. 433-460.
- Turing, A.M., *Intelligent Machinery*, in C.R. Evans, A.D.J. Robertson (eds.), *Cybernetics: Key Papers*, London, Butterworths, 1968.
- Turing, A.M., *Lecture to the London Mathematical Society on 20 February 1947*, in B.E. Carpenter; R.W. Doran (eds.), *A.M. Turing's ACE Report of 1946 and Other Papers*, Cambridge MA, MIT Press, 1986.
- Turing, A.M., *Proposal for Development in the Mathematical Division of an Automatic Computing Engine (ACE)*, in B.E. Carpenter; R.W. Doran (eds.), *A.M. Turing's ACE Report of 1946 and Other Papers*, Cambridge MA, MIT Press, 1986.
- Turing, A.M., *Systems of Logic Based on Ordinals*, in "Proceedings of the London Mathematical Society", Series 2, v. 45, 1939, pp. 161-228.
- Turing, A.M., *Computability and λ -definability*, in "Journal of Symbolic Logic", v. 2, n. 4, 1937, pp. 153-163.
- Turing, A.M., *Typescript copy made by Mrs Turing of first rough draft of précis of 'Computable Numbers', made for Comptes Rendues*, 1936, Contemporary Scientific Archives Centre, Cambridge, King's College Library, AMT-K-4: <https://turingarchive.kings.cam.ac.uk/material-given-kings-college-cambridge-1960-amtk/amt-k-4>).
- Turing, A.M., *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, in "Proceedings of the London Mathematical Society", v. 42, n. 1, 1937, pp. 230-265.
- Von Neumann, J., *The General and Logical Theory of Automata*, in Id. *Collected Works. Vol. 5: Design of Computers, Theory of Automata and Numerical Analysis*, London, Pergamon Press, 1963.
- Watson, A.G.D., *Mathematics and Its Foundations*, in "Mind", v. 47, n. 188, 1938, pp. 440-451.
- Wittgenstein, L., *Remarks on the Philosophy of Psychology. Bemerkungen über die Philosophie der Psychologie*, Vol. 1, G.E.M. Anscombe, G.H. von Wright (eds.), Oxford, Blackwell, 1980.

Abitare l'incomputabile. Alcune considerazioni sul programma di ricerca di Alan Turing

Verso la fine degli anni Quaranta, Alan Turing aveva maturato l'idea che i computer digitali avrebbero potuto riprodurre il pensiero umano e, per misurarne l'intelligenza, propose il celebre "gioco delle imitazioni", diventato poi il "Test di Turing". Sebbene sia stato talvolta considerato una definizione operativa di pensiero o intelligenza, nella prospettiva di Turing il test forniva solamente una condizione sufficiente affinché il comportamento di una macchina potesse essere considerato intelligente. Turing giunse a queste considerazioni a partire dal suo lavoro – iniziato negli anni Trenta – nel campo della logica matematica per mostrare la non solvibilità dell'*Entscheidungsproblem* proposto da David Hilbert. Questo articolo ambisce a riprendere alcune posizioni di Turing in relazione ai metodi matematici di dimostrazione, all'intelligenza e alle macchine di calcolo, per mostrare l'influenza fondamentale che ebbero sul suo pionieristico programma di ricerca sull'intelligenza artificiale.

PAROLE CHIAVE: Computabilità, incomputabilità, macchina di Turing, tesi di Church-Turing, intelligenza artificiale

Inhabiting the uncomputable. Some reflections on Alan Turing's research program

Towards the end of the 1940s, Alan Turing had developed the idea that digital computers could reproduce human thinking and, in order to measure their intelligence, he proposed the famous "imitation game", which later became known as the "Turing test". Although it has sometimes been considered an operational definition of thinking or intelligence, in Turing's view, the test only provided a sufficient condition for a machine's behaviour to be considered intelligent. Turing arrived at these conclusions based on his work, which began in the 1930s, in the field of mathematical logic to demonstrate the unsolvability of David Hilbert's *Entscheidungsproblem*. The present article aims to revisit some of Turing's ideas on mathematical methods of proof, intelligence and computing machines, in order to demonstrate the fundamental influence they had on his pioneering research programme on artificial intelligence.

KEYWORDS: Computability, uncomputability, Turing machine, Church-Turing thesis, artificial intelligence

Deborah De Rosa

Notes for a mathematical *aisthesis*: from *Gestalt* to language

To *comprehend* something means to have it as a gestalt, or at its functional place in a gestalt.

(Duncker 1926, p. 653)

I would like to begin with a short story that has to do with the renovation of a house. Here, where I currently live and where I am now writing, it had been decided to renovate the floors; at the time it was my turn to accompany Antonio (I use a fictitious name) on the first sweep of the area. Mr. Antonio, just under 70 years old, the father of the renovation company manager, had had to leave school when he was very young; he was retired by then, but loved to make himself useful with his son's clients. I had the land registry file with me and was about to give him the information about the surface area, when, with a smile, he motioned me to wait and pulled out from his coat a squared notebook, a pencil and a tape measure. He started a careful observation of the ground, took a few steps into the still bare open space with its highly irregular floor plan, took two lengths as if to establish a small portion of the surface. Then he waggled his finger as if to count something, drew a couple of figures and a couple of multiplications and subtractions in pencil, and drew out the area in square metres with astonishing precision. He burst out laughing when he saw that the result was right, and added something that I didn't understand much, due to his dialect unknown to me, but he seemed quite happy and satisfied. I was unable to make him explain to me the series of operations he had carried out to arrive at the area of that irregular polygon; however, I am quite sure that Antonio, although he knew the basic mathematical operations, was not very familiar with the basic geometric formulae one learns at school. Yet he had his own way of arriving at the result, which worked, and also seemed to give him a certain satisfaction, like any good problem solving.

In all likelihood, Antonio's method for calculating area will not end up in teaching manuals; nevertheless, it was effective and, in its self-production, it constitutes a genuine case of what Max Wertheimer calls *productive thinking*: the creative activity of reasoning aimed at identifying solution tools. Within this theoretical framework, in the terms outlined by *Gestalttheorie* of which Wertheimer was one of the founders, the perceptual dimension holds a prominent role (see Wertheimer 1924; Katz 1992). Forms, in fact, are primarily perceptual: for this psychological school, and not secondarily a philosophical one, the whole is the original mode of our sensory interaction with the world. Therefore, if we want to make use of *Gestalt* categories, it will be essential to consider the foundational passage from *αἰσθητικός*, i.e. that which concerns sensation (in turn from *αἰσθάνομαι* as 'to feel', 'to perceive'); thus, from the first and most cognitive dimension of aesthetics, which we have referred to from the title as *aisthesis*. This paper aims to investigate in a first part the connection between mathematical thinking and the perceptual aspect of experience within the framework of *Gestalttheorie*, and in a second part the role of language in the advancement of knowledge and problem solving in this field. For this second part we will use, in continuity with Wertheimer's work, some phenomenological arguments developed in Maurice Merleau-Ponty's work on the connection between language and thought.

1. Blind attitude versus understanding

In mathematical practice, there are at least two ways of working, which are certainly interconnected, but at the same time exercised with very different attitudes by the subject. On the one hand, we have 'calculation' activities: these are operations, usually carried out according to an established sequence in algorithmic form, aimed at processing data in order to obtain output results; the repetitive, serial and automatic dimension is prevalent here, in the context of the application of rules already known to the subject who is operating. In school education, this type of competence is usually learnt through 'exercises', for the performance of which the formula to be applied is indicated upstream, more or less explicitly. For example, if I am assigned a set of binomials to square and I am first taught the formula, I will practice some variations on the same theme by applying a rule to cases for which I know it is relevant.

Another way of practicing mathematics is to deal with 'problems': this occurs when we are confronted with a situation that can be translated into a question requiring an answer. In such cases, we usually do not know in advance exactly what solving protocol is to be adopted; we may have to choose between the mathematical tools we have already acquired,

or we may not yet know the appropriate formulae for the solution, or, as is the case in academic research, a solving protocol may not yet have been established for this type of problem.

Wertheimer notes that problem-solving is analogous in its structure of thought, both in cases faced by professional mathematicians and in everyday life situations where the use of mathematics is required. The «birth of a genuine idea, of a productive development» is as much a «surprising event» (Wertheimer 1959, p. 36) for the individual who gives form to his personal method (like our Antonio who we can imagine in front of his first irregular floor plan) as it is for the scientist. It is «productive thinking» (see also Wertheimer 1925):

What occurs when, now and then, thinking really works productively? What happens when, now and then, thinking forges ahead? What is really going on in such a process? [...] when one has just had a creative idea, however modest the issue, when one has begun really to grasp an issue [...] There are fine cases. You can find them often, even in daily life [...] the transition from a blind attitude to understanding in a productive process (Wertheimer 1959, p. 36).

This contribution by the Czech psychologist constitutes the main study in which the operational concept of *Gestalt* is extended from the perceptual sphere, its main area of relevance, to that of reasoning.¹

Wertheimer, who was passionate about mathematics and logic² and strongly interested in the didactic aspects of these disciplines in the education system, has built his study on a large and solid stock of data, obtained in experimental situations with various groups of subjects.³ Alongside his own investigations, the author proposes an analysis in *Gestalt* terms of a famous anecdote in which Carl Friedrich Gauss was protagonist as a child.⁴ It is said that the task given to him was a long sum of natural num-

¹ More interesting thoughts on this subject are in Köhler 1969.

² On this subject, the testimonies contained in the correspondence with Albert Einstein, his dear friend, are both instructive and fascinating. He often sent Einstein riddles and curious problems enriched with drawings and diagrams: see Luchins, Luchins 1990 and also Miller 1975.

³ On the issue of the method between quantitative and qualitative approaches, see Paolo Bozzi's very clear introduction to the Italian edition: Bozzi 1997; but also Nerney 1979 for a more critical approach.

⁴ The author places the age of the young mathematician at 6 years old and frames the task as a summation from 1 to 10. In fact, the story has been recounted over the years with some variations, including the age and the terms of the summation, which is more often reconstructed as from 1 to 100 (a more plausible scenario, as summing progressively up to 10 would not have constituted a task so lengthy as to require abbreviation). Historical inaccuracies of this kind, however, would have no impact on Wertheimer's reflections regarding the mathematical operation underlying the summation. For an investigation into the reconstruction of the anecdote, see Hayes 2006.

bers in progression; let us imagine, with Wertheimer, that this operation was required on the series from 1 to 10. One could proceed by adding the numbers from first to last, in twos and twos, but Gauss devised a process that avoided this repetitive operation and replaced it with another, faster one. The first step consists of noting that the position of the numbers in the series allows one to associate pairs (first and last number, second and penultimate, and so on with internal pairs), obtaining for each sum the same result, which in our example is 11:⁵

not

$$\begin{array}{c}
 1 + 2 + 3 + 4 + \dots \\
 \underbrace{\quad\quad} \\
 3 + 3 \\
 \underbrace{\quad\quad} \\
 6 + 4 \\
 \underbrace{\quad\quad} \\
 10 \dots
 \end{array}$$

but

$$\begin{array}{c}
 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\
 \underbrace{\hspace{10em}} \\
 \underbrace{\hspace{8em}} \\
 \underbrace{\hspace{6em}} \\
 \underbrace{\hspace{4em}} \\
 \underbrace{\hspace{2em}}
 \end{array}$$

At this point, the number of pairs is needed, which will be equal to half of the last number; multiplying 11×5 will give the required result. From this ingenious procedure will derive, later on, Gauss's formula for the sum of the first n natural numbers, which states that the sum of the natural numbers from 1 to n is equal to the half-product between n and $n + 1$: $S_n = (n + 1) \frac{n}{2}$.

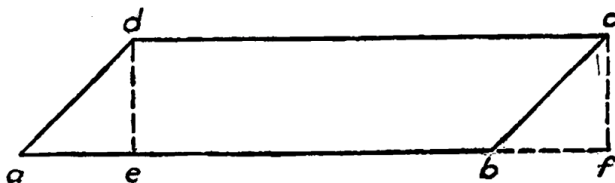
The possibility of reorganising the series into pairs in this specific way does not lie in the individual numbers as such, but in the internal logic of the structure in which they are placed: it is necessary to consider their position value in this specific *whole*. In fact, the succession of natural numbers gives rise to a pattern in which the factors increase (always +1) when viewed from left to right, and consequently decrease in the same way when viewed from right to left. On this progressive trend, of 1 unit ascending or descending at a time, is founded the property of the series whereby the sum of the 'internal' pairs, first-last and so on up to the 'center', must be equivalent; hence, it is on this network of relations between

⁵ The fig. 60, so named by the author, is in Wertheimer 1959, p. 125.

the elements that rests the possibility of deconstructing the series and reconstructing it according to new relations. The latter must constitute a sort of *translation* of the first situation into a second, which maintains its initial requirements: attempting random or inappropriate reorganisations would lead to a failure to solve the problem.

Without wishing to take anything away from Gauss's genius, which emerges far beyond this single episode from his childhood, we can draw some interesting considerations from what follows in Wertheimer's investigation: we could have more 'young Gausses', if only we encouraged subjects, during the years of early education, to look for solutions to problems on their own by handing over fewer ready-made formulae. In fact, the various experimental contexts in which the psychologist has confronted young students with mathematical questions similar to the one set out so far, show, along with less functional approaches on the part of some, also several instances of particularly creative, ingenious and effective reasoning processes.

Another example, very simple and probably familiar to many since it is usually encountered in the early years of school, is the geometric procedure by which the equivalence between a parallelogram and a rectangle having congruent bases and heights is demonstrated. This construction is often shown to students to justify using the same formula to calculate the area of the two polygons.⁶



By drawing the segment de we isolate, in the starting figure $adcb$, a triangular portion; then projecting the vertex c onto the prolongation of the base ab we can see a triangular area congruent to that in ade , where we can translate the portion of the figure obtained to 'transform' it into a rectangle. The rectangle $edcf$, resulting from the decomposition and reconstruction of the parallelogram $adcb$, constitutes an appropriate reorganisation of it: the problem concerned the calculation of the area, and we note that the area was neither reduced nor extended by the reorganisation, but only reconfigured in such a way as to make its calculation

⁶ The fig. 2, so named by the author, is in Wertheimer 1959, p. 50.

easier. We note, incidentally, that usually in primary education one is first taught to calculate the area of squares and rectangles, and one arrives at the parallelogram – and later trapezoids – already knowing the formula. The latter in turn is usually demonstrated to children by dividing the rectangle into squares, adding these up and from there moving on to multiplication of the lengths of the two sides.

Wertheimer also reports here various tasks that he assigns to students, for the calculation of areas of irregular polygons or even figures with a closed curve perimeter, in order to observe the solving processes, set in motion in the absence of formulae to be applied that alone suffice for the result. Some subjects creatively exploit the principle of reorganisation; others went astray or end up overcomplicating the required problem; still others, finally, fail to advance in the request at all, merely staring at the figures or complaining that no one taught them how to solve the problem. The blind attitude, i.e., the habit of repetitively applying already existing protocols without genuine understanding or even giving up in the absence of instructions, is thus opposed to productive thinking, which instead tends towards real mathematical understanding.

2. Functional fixedness

Mathematical problem solving, in *Gestalt* terms, goes through a number of recurring steps that are indispensable to an effective search for the solution. The problem situation must be observed and understood by looking at the network of relationships that link the individual elements together and which, as posited in the foundations of the *Gestalttheorie*, constitute a *whole* whose properties will be different from those of the individual elements merely added together. The solution process requires an appropriate reconfiguration of the relationships between the elements, which identifies «the centering required by the objective structure of the situation» (Wertheimer 1959, p. 169). For example, in the above-mentioned sum, the main ‘pattern’ that emerges at first glance from observing the series is the arithmetic progression that perceptually ‘advances’ from left to right. The new structure, leading to the solution, reorganises the progression (visually translatable into a line, or rather a kind of oriented vector) into a pattern symmetrically organised around a center. Furthermore, the process requires «a change of meaning of the parts», i.e. of the function of each piece of the whole, aimed at the transformation of the problem «in terms of “good structure”» (Wertheimer 1959, p. 169), according to the Law of *Prägnanz* (see Katz 1992). The result will be a «change in structural view» that will have to be thought out «according to the requirements of the problem» (Wertheimer 1959,

p. 160) and that therefore does not transform the starting set into something totally different, but reorganises it while leaving its basic identity preserved. In this same sense, we can say that $s_n = (n+1)\frac{n}{2}$ is another way of indicating $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = x$; a way organised to become a useful tool for solving future problems of the same type.

Whether we are talking about major challenges for the entire scientific community, or minor everyday problems that affect the individual, the solution almost never springs to mind in a flash and without effort. As Wertheimer reminds us, «before the thought process takes place, or in its early stages, one often has a certain whole-view of the situation, and so of its parts, which is somehow unsuited to the problem, superficial, or onesided»; progressing towards the solution requires a certain degree of detachment or elasticity from the first impression. Indeed, «if one sticks to this view, one will often be unable to solve the actual problem» (Wertheimer 1959, p. 160).

Karl Duncker, who worked with Wertheimer, dealt specifically with difficulties in mathematical problem solving and proposed a hypothesis about the main hindering factors for *Gestalt* restructuring. By examining the reasons why some subjects can define themselves as a «“good” mathematician» while others turn out to be «“poor” mathematicians» (Duncker 1945, p. 110), he highlights the role of a condition he calls «functional fixedness» (Duncker 1945, p. 85). This difficulty consists in a reduced or poor capacity for abstraction from the perceptual datum, whereby the sufferer would be able, little or not at all, to derive the underlying pattern of relations from a starting situation. The function of the individual elements remains fixed, rigidly anchored to the specific case; the subject feels it as immutable, and this prevents him from thinking that the elements can undergo a role switch.

Wolfgang Köhler's experiments with apes show (see Köhler 1925), outside of mathematics, this type of difficulty very clearly. These animals, if provided with a wooden branch, are usually able to see the branch as a tool and use it to move any objects in the vicinity, e.g. to bring food closer. On the other hand, as Duncker notes (Duncker 1945, p. 85), if the branch is still attached to the tree – let us assume it is thin enough and low enough to be broken off – they cannot recognise it as an isolable element that can serve as a stick. The structure 'tree' in this case is perceived rigidly, its constituent elements fail to be grasped as such in view of a functional reorganisation of the problem. Difficulties in mathematics are read in the same terms: the starting situation is perceived rigidly, functions are seen as fixed and therefore cannot be moved. On these bases, we can also say that, in order to authentically understand that is the area of the square, I have to go from the perception of a drawn square and make, for example, that those 10 cm drawn with chalk on the blackboard

become, a symbol for *side*, as well as realise that behind that number 2 in the superscript is the multiplication.

It follows from what has been said that the aesthetic perceptual aspect is indispensable for accessing the *Gestalt* of the situation as a relational structure between elements, but it also follows that this level must not be overpowering. Indeed, the main difficulties in the mathematical attitude would arise from the excessive adherence to the singular situation in terms of the perceived datum, which remains «alive», «relatively inelastic, rigid, and therefore not sufficiently plastic to be reshaped» (Duncker 1945, p. 108, 110).

There is also an interesting aspect, perhaps worthy of more emphasis than in Duncker's text. Describing the experimental situation that the author sets up to investigate solving processes, he reports suggesting that the subjects help themselves by speaking aloud or drawing: «after the subject was given paper and pencil, I gave [...] general instructions to him at the outset of the experimental series: [...] *Try to think aloud*. I guess you often do so when you are alone and working on a problem. And draw as much as possible» (Duncker 1926, p. 664). We highlight the following annotation, placed in brackets in the text: «thinking aloud is not an introspective report, no more than drawing would be» (Duncker 1926, p. 664). There is no particular explanation for this suggestion; the author seems to take it for granted, without justifying it. It is not difficult to understand its meaning; one may venture that the use of pen and paper, soliloquy or verbalisation to an interlocutor are familiar means to anyone attempting to solve a problem. However, we would like to attempt a more solid explanation, which will have to pass through the role of language in its various forms involved. In the case of mathematical problem solving, this is first and foremost formal algebraic language; then, usually, support in the historical-natural language in which the subject habitually expresses himself; finally also drawing, which can be considered in the guise of an iconic sign.⁷

3. The mathematical phenomenon

It will be useful, at this point, to consider the reflection on mathematical thought developed by Merleau-Ponty, in the context of his perceptual phenomenology that owes so much to *Gestalt theory*. Recalling the theorem of the sum of the internal angles of a triangle, which establishes that

⁷ We suggest, in this regard, a broader comparison with Charles Peirce's semiotic theory, following the insights proposed by Sini 2019, p. 19. Additionally, see the comparison drawn between pictorial signs and language in Merleau-Ponty 1952.

this sum is equivalent to a flat angle (180°), let us recall that the demonstration in turn rests on the theorem of parallel lines cut by a transversal, which establishes precise relationships between internal and external angles. The initial question requires a construction, namely that we can evaluate the starting structure (the triangle) and understand if and how we can modify the starting design in order to obtain a more informative result (Merleau-Ponty 1945, pp. 405-406).

Such an operation is possible thanks to certain characteristics typical of human intentionality, in the phenomenological sense, which rests on the sensory system without being reduced to it. The demonstration in question is due to the fact that «my perception of the triangle was not, so to speak, congealed and dead; the drawing of the triangle on the paper was merely its envelope, it was shot through by lines of force, untraced yet possible directions were born everywhere in it», through which the triangle «was bursting with indefinite possibilities of which the construction actually drawn is merely one particular case» (Merleau-Ponty 1945, p. 406). This reflection, while belonging to a philosophical system that is purely phenomenological, is essentially compatible with Duncker's reflection on functional fixedness: for those afflicted by it, these «indefinite possibilities» are precisely that which does not appear, and the triangle will remain just an immovable triangle. For Merleau-Ponty, therefore, geometric construction results as the product of «the ability I have of making sensible emblems appear from a certain hold on things that is nothing other than my perception of the structure "triangle"» (Merleau-Ponty 1945, p. 406).

In this, as in every other aspect of the phenomenology of perception, it is crucial to recognise the anchoring of knowledge to the human condition of being corporeal. Not only must it be remembered that the subject has a body, but also that cannot not have a body; it is the «body schema» (see Merleau-Ponty 1945, pp. 100-105) that makes each of us «a point of view upon things», and there is no reason why this condition should not also hold true in the field of mathematical thought. In this view, every possible *noesis* is filtered through the support of the body, giving rise to an interaction with the world that is always also spatial; likewise, «the subject of geometry is a motor subject» (Merleau-Ponty 1945, p. 314, 406; see also Halák 2022). Therefore, in the technical lexicon of this discipline, «if the words "on", "by", etc., maintain a sense, this is because I am working on a sensible or imaginary triangle, which is to say, one that is at least virtually situated in my perceptual field, oriented according to "up" and "down", "right" and "left"», i.e. on a figure that is in any case always «implicated in my general hold upon the world» (Merleau-

Ponty 1945, p. 405). One usually remembers that the triangle, the circumference or the straight line as geometric entities are not equivalent to the triangles, circles and lines that we find or reproduce in the physical world, since in their definitions specific properties have been postulated that can never or rarely be satisfied by material entities. However, without invalidating these postulates, we cannot avoid a periodic return to the world of things in the mathematical realm as well: it is the latter that ultimately founds our possibility of understanding and reasoning. Merleau-Ponty emphasises that «there would be no experience of truth» if we reasoned only «*vi formae*, and if formal relations were not first presented to us as crystallized in some particular thing», and that «we would not even be capable of fixing an hypothesis in order to draw out its consequences if we did not begin by taking it as true» (Merleau-Ponty 1945, p. 405). This reflection is certainly not limited to geometry; by means of examples relating to numerical series, such as that of Gauss, which Merleau-Ponty also takes up, it is emphasised that transformations of structure are to be considered «the equivalent in the arithmetical object of a geometric construction» (Merleau-Ponty 1969, pp. 125-126).

There is another aspect to consider: the possibility of «formalization» (Merleau-Ponty 1945, p. 405). In order for a productive thinking process to contribute to the advancement of collective mathematical knowledge, for the scientific community and not just for the individual, it is essential that this process be translated into a language, which cannot be the natural language but must be the one typical of mathematics. «The algorithmic expression», this is the name Merleau-Ponty gives to the formal algebraic and logical language, «is *exact* because of the exact equivalence established between its initial relations and those that are derived from them» (Merleau-Ponty 1969, p. 128). One could compare formal language with natural language on the basis of the degree of semantic vagueness; this approach would lead us to separate the two types of language particularly sharply. Merleau-Ponty points out, in this regard, that algorithmic expression is still «a special case of language», and specifically that it is «secondary». In formal language, the signifier seems considerably closer to the signified than in everyday language; we are led to believe that, unlike historical-natural language, in this symbolic system «the signification is captured without remainder». According to the phenomenologist, this would be an effect of «the *shift* of restructuring», a process that is a «characteristic of language» attributable to the erasure of the transformations undergone by the structure in question. When we have found the formula, we collectively *forget* the steps that led us to it from the problem, with a systematically «omitted mention of

the structure's transcendence toward its transformations» (Merleau-Ponty 1969, p. 128).⁸

The centrality of perception in Merleau-Ponty's phenomenological theory does not in any way imply a reduction of thought to it; it is as obvious as it is important to remember that «the thing thought is not the thing perceived», that «knowledge is not perception» and, although comparable to gesture, «is not one gesture among all the other gestures», as it «is the vehicle of our movement toward truth» (Merleau-Ponty 1969, p. 129; see also 1951). Merleau-Ponty argues in depth that there is no pre-existing thought to language: they take shape together, according to a movement that is not to be understood as parallel but as a kind of reciprocal and incessant sculpting of one upon the other. If thought were given first and then speech were to follow, we could not even understand «why the most familiar object appears indeterminate so long as we have not remembered its name» (Merleau-Ponty 1945, p. 182). From this, one can reflect on the function of language, which we could define as heuristic: it is indispensable for the subject not only to communicate with others, but even more so to understand for himself what he intends to communicate. Thought needs a 'body' to take shape and manifest, and conversely, the sign is in turn shaped by thought: «all truly expressive speech» and «all language in the phase in which it is being established» (not just verbal language, but also drawing or painting, and even formal language) does not merely «choose a sign for an already defined signification, as one goes to look for a hammer in order to drive a nail» (Merleau-Ponty 1952, p. 46), but makes the semiotic system act upon meaning to know it in turn. «The thinking subject himself is in a sort of ignorance of his thoughts so long as he has not formulated them for himself, or even spoken or written them» (Merleau-Ponty 1945, p. 183), and there is no reason why this should not also be valid for mathematical thought.

Now, we can return to Duncker's suggestion for facilitating productive thinking: why would speaking aloud or drawing help in solving mathematical problems? Why would it constitute an important step in carrying out reasoning and restructuring the problem? As Merleau-Ponty argues, «for the speaking subject, to express is to become aware of; he does not express just for others, but also to know himself what he intends» (Merleau-Ponty 1951, p. 90): I must move from attributing a 'body' to thought in order to give it shape, and this body con-

⁸ It is not an avoidable process, nor is the intention to highlight a problem that needs correction. Rather, it is a characteristic of every language, particularly pronounced in formal ones, which we can assume to be linked to the possibility of syntactic manipulation typical of inference rules in symbolic logic, for example.

sists in the materiality of the sign, whether formal, natural, or iconic. Not only that: I could carry out this operation mentally as well; so why ‘aloud’ or on paper? We can hypothesize that the dimension of the ‘return’ of the message from the outside helps facilitate the dynamics of understanding. ‘Aloud,’ I can listen to myself as if someone else were speaking to me; by drawing, I can look at the paper as if someone else had drawn it. These modes seem to facilitate and strengthen my dual role as both the sender and recipient of my own message, a role that also takes place – we might say with more difficulty and less clarity – in tacit reasoning and without the support of writing. As Merleau-Ponty notes, «to the extent that what I say has meaning, I am a different “other” for myself when I am speaking; and to the extent that I understand, I no longer know who is speaking and who is listening» (Merleau-Ponty 1951, p. 97).

This journey has aimed to show that the *Gestalt theory* applied to thinking, combined with the integration of the Merleau-Pontian phenomenological theory, allows for an exceptionally fruitful exploration of the relationship between mathematics, language, and the aesthetic dimension. The latter has been worked through and understood in this contribution in its broadest sense as knowledge tied to sensoriality; we might add in passing that this reflection could also be seen as a useful element for understanding the phenomenon of the relevance of beauty in mathematics. Indeed, a form particularly suited to conveying a structure of meaning (which can also be constituted by a formal linguistic expression), being its *material* aspect, could be considered a perceptible, aesthetic object, capable of being appreciated for its beauty as well.⁹ Setting aside this additional point, let us return to the brief quotation at the beginning, in which Duncker emphasizes how authentic understanding is linked to the possibility of grasping a situation in its *Gestalt*, that is, in its network of foundational relations, beyond the mere sum of its constituent elements. We find a striking correspondence in Merleau-Ponty’s consideration, which sheds further light on the application of phenomenology to the mathematical field: «what is essential», — and here we refer to the specific phenomenological sense of essence — «to mathematical thought, therefore, lies in the moment where a structure is decentered, opens up to questioning, and reorganizes itself according to a new meaning» showing that «the truth of the result», ultimately, «lies in a restructuring» (Merleau-Ponty 1945, pp. 160, 404).

⁹ We have discussed this hypothesis in detail in De Rosa 2023.

Bibliography

- Bozzi, P. (1997). *Sul metodo di Wertheimer*, in Wertheimer 1959, tr. it., *Il pensiero produttivo*, Giunti, Firenze 1997, pp. VII-XXII.
- De Rosa, D. (2023). *Mathematical beauty: On the aesthetic qualities of formal language*, in "Aisthesis", 16(2), pp. 121-131.
- Dunker, K. (1926). *A Qualitative (Experimental and Theoretical) Study of Productive Thinking (Solving of Comprehensible Problems)*, in "The Pedagogical Seminary and Journal of Genetic Psychology", vol. 33, n. 4, pp. 642-708.
- Dunker, K. (1945). *On Problem Solving*, in "Psychological Monographs", vol. 58, n. 5.
- Ellis, W.D. (1938). *A Source Book of Gestalt Psychology*, Routledge & Kegan, London.
- Halák, J. (2022). *Mathematics embodied: Merleau-Ponty on geometry and algebra as fields of motor enaction*, in "Synthese", 200 (1), pp. 1-28.
- Hayes, B. (2006). *Gauss's Day of Reckoning*, in "American Scientist", May-June 2006, vol. 94, n. 3, <https://www.americanscientist.org/article/gausss-day-of-reckoning>
- Katz, D. (1992). *Gestaltpsychologie*, Benne Schwabe & Co., Basilea.
- Köhler, W. (1925). *The mentality of apes*, Harcourt, New York.
- Köhler, W. (1969). *The Task of Gestalt Psychology*, Princeton University Press, Princeton.
- Luchins, A.S., Luchins, E.H. (1990). *The Einstein-Wertheimer Correspondence on Geometric Proofs and Mathematical Puzzles*, in "The Mathematical Intelligence", vol. 12, n. 2, pp. 35-43.
- Merleau-Ponty, M. (1945). *Phenomenology of Perception*, en tr., Routledge, London-New York, 2012.
- Merleau-Ponty, M. (1951). *On the Phenomenology of Language*, en. tr., in Id. 1960, 84-97.
- Merleau-Ponty, M. (1952). *Indirect Language and the Voices of Silence*, en. tr., in Id. 1960, pp. 39-83.
- Merleau-Ponty, M. (1960). *Signs*, en. tr., Northwestern University Press, Evanston 1964.
- Merleau-Ponty, M. (1969). *The Prose of the World*, en. tr., Northwestern University Press, Evanston 1973.
- Miller, A. (1975). *Albert Einstein and Max Wertheimer: A Gestalt Psychologist's View of the Genesis of Special Relativity Theory*, in "History of Science; an Annual Review of Literature, Research and Teaching", vol. XIII, pp. 75-103.
- Nerney, G. (1979). *The gestalt of problem-solving: An interpretation of Max Wertheimer's Productive Thinking*, in "Journal of Phenomenological Psychology", 10(1), pp. 56-80.
- Sini, C. (2019). *Introduzione*, in Merleau-Ponty 1969, tr. it., *La prosa del mondo*, Mimesis, Milano 2019, pp. 17-27.
- Wertheimer, M. (1924). *Gestalt Theory*, en. tr., in Ellis 1938, pp. 1-11.
- Wertheimer, M. (1925). *The Syllogism and Productive Tinking*, en. tr., in Ellis 1938, pp. 274-282.
- Wertheimer, M. (1959). *Productive thinking*, Springer, Cham 2020.

Note per un'*aisthesis* matematica: dalla *Gestalt* al linguaggio

Questo articolo esplora alcune possibilità di indagine del pensiero matematico in chiave percettiva, in particolar modo concentrandosi sul possibile nesso tra i processi creativi matematici e le forme (*Gestalten*) rilevabili durante tali processi. A tale scopo, una prima parte è dedicata alla prospettiva fornita da autori nel quadro della *Gestalttheorie*, sia in campo matematico che nella più ampia indagine sui processi di soluzione dei problemi; una seconda parte, avvalendosi della continuità tra ricerche gestaltiste e metodo fenomenologico, è dedicata alla riflessione sulla funzione del linguaggio nell'avanzamento della conoscenza in ambito matematico.

PAROLE CHIAVE: Teoria della forma, Filosofia della matematica, Fenomenologia, Wertheimer, Merleau-Ponty

Notes for a mathematical *aisthesis*: from *Gestalt* to language

This article explores some possible ways of investigating mathematical thinking from a perceptual perspective, focusing in particular on the potential link between creative mathematical processes and the forms (*Gestalten*) that can be grasped during such processes. To this end, the first part is devoted to the perspective offered by authors within the framework of *Gestalt theory*, both in the mathematical field and in the broader investigation of problem-solving processes; the second part, drawing on the continuity between *Gestalt* research and the phenomenological method, is dedicated to reflecting on the role of language in the advancement of knowledge in the field of mathematics.

KEYWORDS: Gestalt theory, Philosophy of mathematics, Phenomenology, Wertheimer, Merleau-Ponty

Lorenzo Marannino

The Problem of Mathematical Objects in Merleau-Ponty's Phenomenology

In recent years, several studies have highlighted the potentiality of Maurice Merleau-Ponty's phenomenology to offer a valuable perspective on the ontological status and constitution of ideal objects in mathematics. These contributions can be categorised into three main strands: i) M. Haas, L. Haas,¹ and Samantha Matherne² have argued that Merleau-Ponty's analyses can be fully integrated into debates within the philosophy of mathematics, providing a positive and constructive contribution to the field; ii) Jan Halàk³ has focused on the ways Merleau-Ponty's work sheds light on the role of embodiment in mathematical practices, offering a productive interpretation of the interplay between the body and mathematical reasoning; iii) finally, Pierre Cassou-Noguès⁴

¹ Michael Hass, Lawrence Hass, *Merleau-Ponty and The Origin of Geometry*. In F. Evans (Ed.), *Chiasms: Merleau-Ponty's notion of flesh* (pp. 177–187), SUNY Press, Albany, 2000. Lawrence Hass, in his monograph on Merleau-Ponty, has focused on the theme of mathematical objects. He has proposed a comparison between the conception emerging from Merleau-Ponty's texts and three of the main non-Platonic currents in the philosophy of mathematics: analytic philosophy, mathematical formalism, and intuitionism. Hass has argued – perhaps with overly optimistic conclusions – that Merleau-Ponty's theory represents a sort of “Holy Grail” in this field. This is because, as he puts it: “It offers a non-Platonic theory of mathematics that recognizes the fundamentality of the process of construction (or proof), while also permitting transfinite operations”. Lawrence Hass, *Merleau-Ponty's Philosophy*, Indiana University Press, Bloomington, 2008, pp. 159.

² Samantha Matherne, *Merleau-Ponty on abstract thought in mathematics and natural science*, *European Journal of Philosophy*. 2018;1–18.

³ 1) Jan Halàk, *Mathematics embodied: Merleau-Ponty on geometry and algebra as fields of motor enaction*, in “Synthese” 200, (2022), 34, pp. 1-28; 2) Id. *Embodied higher cognition: insights from Merleau-Ponty's interpretation of motor intentionality*, *Phenomenology and the Cognitive Sciences*, n. 22 (2023), pp. 369–397.

⁴ 1) Pierre Cassou-Noguès, *Le problème des mathématiques dans la philosophie de Merleau-Ponty*, in M. Merleau-Ponty, *Notes de cours sur L'Origine de la géométrie de Husserl* (pp. 369–404), Puf, Paris, 1998 ; 2) Id., *Pour une épistémologie merleau-pontienne en mathématiques*, in “Chiasmi International” (1), Mimesis, Milano, 1999, pp. 287-300.

and Thomas Baldwin,⁵ while recognising the originality and potential of Merleau-Ponty's treatment, have adopted a more cautious approach, identifying certain limitations, such as his insufficient attention to the actual methods and practices of mathematical proofs. Despite these significant contributions, a comprehensive and theoretically consistent study employing Merleau-Ponty's framework to develop a systematic theory of ideal objects remains a *desideratum*.⁶

Unable to fulfil this ambitious goal within the scope of this article, I will focus on some elements that have been overlooked in the cited studies and I will propose a working hypothesis aimed at contributing, partially, to the formulation of a "Merleau-Pontian" theory of idealities. Specifically, while the existing literature has highlighted the productivity of Merleau-Ponty's analyses on this topic, paradoxically, none of these works has addressed why the French phenomenologist – who was not specifically trained in such fields – chose to include sections on mathematical objects in *Phenomenology of Perception*,⁷ *The Prose of the World*,⁸ and certain *Lectures* at the Collège de France.⁹

In other words, it is necessary to clarify *why* mathematical idealities pose a challenge for his phenomenology and *why* a consistent phenomenological theory must provide a rigorous description of these objects that aligns with the treatment of other domains of phenomenality. I contend that the originality – and critical points – of Merleau-Ponty's theoretical approach lie in his attempt to integrate the reflection on mathematical objects into two interrelated perspectives. First, he develops a broader theory of perception aimed at overcoming the opposition between empiricism and idealism. Second, he proposes a theory of expression designed to address certain unresolved issues in *Phenomenology of Perception*. This dual focus represents both a strength and a weakness. The path I suggest at the end of the article involves integrating the two main phenomenological approaches that dominate this field: i) the reduction of idealities to

⁵ Thomas Baldwin, *Language as the embodiment of geometry*. In R. Jensen & D. Moran (Eds.), *The phenomenology of embodied subjectivity*, Springer, Cham, 2013, pp. 305-327.

⁶ Surprisingly, Kirk Besmer's monograph, *Merleau-Ponty's Phenomenology: The Problem of Ideal Objects* (Continuum, New York, 2007), barely addresses mathematical idealities at all.

⁷ Maurice Merleau-Ponty, *Phénoménologie de la perception*, Gallimard, Paris; trans. D. A. Landes, *Phenomenology of Perception*, Routledge, London-New York, 2012.

⁸ Id. *La Prose du monde*, Gallimard, Paris, 1969; trans. J. O'Neill, *The Prose of the World*, Northwestern University Press, Evanston, 1973.

⁹ 1) Id., *L'institution, la passivité. Notes de cours au Collège de France (1954-1955)*, Belin Éditeur, Paris, 2003; trans. L. Lawlor and H. Massey, *Institution and Passivity*, Northwestern University Press, Evanston, 2010.

² Id., *Notes de cours sur l'Origine de la géométrie chez Husserl*, Puf, Paris, 1998; trans. L. Lawlor and B. Berge, *Husserl at the Limit of Phenomenology*, Northwestern University Press, Evanston, 2002.

a pre-theoretical or perceptual ground (Husserl and Merleau-Ponty); ii) the placement of phenomenological analyses exclusively within an intra-theoretical dimension (J.-T. Desanti and D. Pradelle).

1. Phenomenology and the Enigmas of ‘Pure Thought’

The question over the definition of the ontological status of mathematical objects is as old as philosophy itself. Philosophy has always looked at perfection and indubitability characterising mathematical demonstrative procedures with a sense of wonder and admiration. At times – particularly from the modern philosophical period onward – it has even sought to emulate these argumentative methods. Husserl’s phenomenology, through the theory of categorical intuition or perception [*kategoriale Anschauung*],¹⁰ has sought to describe the intentional modes and lived experiences [*Erlebnisse*] of evidence [*Evidenz*] in which ideal objects appear. He has attempted to chart a third path between the dead ends of psychologism and Platonic or theological realism.¹¹

The argumentative path of Phenomenology of Perception describes mathematical objects while attempting to situate between two opposing poles of classical philosophical reflection: *empiristic realism* and *intellectualist idealism*. Both approaches share the dogmatic presumption of a reality-in-itself: either in things (empiricism) or in the mind (idealism). Regarding mathematical idealities, Merleau-Ponty tries to refute the most dangerous position in this field, idealism, which bases its strength on the supposed purity and transparency of the lived experience connected to these ideal entities. On the other hand, empiricism, which in the case of idealities reduces itself to psychologism, falls into a problematic position already identified by Husserl in *Prolegomena to Pure Logic*.¹² This

¹⁰ Edmund Husserl, *Logische Untersuchungen. Zweiter Teil: Untersuchungen zur Phänomenologie und Theorie der Erkenntnis. In zwei Bänden* [Hua XIX], ed. by U. Panzer, Nijhoff, Den Haag, 1985; trans. J. N. Findlay, *Logical Investigations*, London-New York, Routledge, 2001, § 40 ff. Husserl will seek to avoid Platonism by tracing categorical forms back to a “logic of sensibility”. Cf. Lorenzo Marannino, *La ‘logica del sensibile’ nella fenomenologia di Husserl. La funzione del precategoriale dalle Ricerche logiche a Esperienza e giudizio*, in “Archivio di filosofia” XCII, 1/2024, pp. 201-216.

¹¹ Regarding the theological version of realism, I refer to the Scholastic-Thomist interpretation. On this topic, see the excellent summary provided by Dominique Pradelle in the introductory section of his latest notable volume of phenomenological studies on mathematical objects. Cf. Dominique Pradelle, *Être et genèse des idéautés. Un ciel sans éternité*, Puf, Paris, 2023, pp. 18-28.

¹² Edmund Husserl, *Logische Untersuchungen. Erster Teil: Prolegomena zur reinen Logik. Text der 1. und der 2. Auflage* [Hua XVIII]; Eds. E. Holenstein, Nijhoff, Den Haag, 1975; trans. J. N. Findlay, *Logical Investigations*, London- New York, Routledge, 2001.

position does not distinguish between mental acts and their ‘intentional content’ and cannot explain the validity of logical and mathematical laws. Consequently, it leads inevitably to an unacceptable relativism.

The topic of mathematical idealities is addressed in the third part of *Phenomenology of Perception* (*Being-for-Itself* and *Being-in-the-World*), specifically in the chapter on the *Cogito*. This section examines the intentional dynamics of what we define as ‘thought’, that is, the domain in which the *presence* of something in lived experience (*thinking-of*) appears to coincide with the *self-presence* of thought itself in its “self-possession”.¹³ When conceived in this way, the *Cogito* can be interpreted in two ways: i) in an empiricist manner: “To reduce experience to a sum of psychological events for which the I is merely a common name or the hypothetical cause”¹⁴ or ii) in an idealist manner: “To recognize, beneath events, a field and a system of thoughts that would not be subjected to time, nor to any limitation.”¹⁵

In other words, while the empiricist and psychologicist conception disperses experience into a collection of isolated facts devoid of unity, and thus of *meaning*, intellectualist idealism equates the *being* of the subject with its *thought*, leading directly to the “affirmation of the non-temporality of the mind and the admission of an eternal consciousness”.¹⁶ This makes subjectivity a kind of “universal constituent”¹⁷ that generates all lived experience and meaning entirely on its own, without being open to receptivity or affection. If the *Cogito* is thought in an idealist manner, an unsustainable conclusion occurs: “It must then be said, with no qualification, that my mind is God”.¹⁸ According to Merleau-Ponty, it is necessary to find “a path between eternity and the fragmented time of empiricism”.¹⁹

For Merleau-Ponty, it is essential to reveal that the subject’s supposed full self-presence, as well as the ideal objects it produces, are ultimately an illusion. He undertakes this task by examining various levels of conscious life: from the simplest, involving a relationship to external transcendence, such as sensory perception; to acts of will and feeling, which

¹³ M. Merleau-Ponty, *Phenomenology of Perception*, cit. p. 392. It should be noted that Merleau-Ponty draws extensively on Pierre Lachize-Rey’s works in his description of the *Cogito*, particularly *L’idéalisme kantien* (Alcan, Paris, 1932) and *Le Moi, le Monde et Dieu* (Boivin, Paris, 1938).

¹⁴ M. Merleau-Ponty, *Phenomenology of Perception*, cit. p. 390.

¹⁵ Ibid.

¹⁶ Ibid.

¹⁷ Ivi, p. 391.

¹⁸ M. Merleau-Ponty, *Phenomenology of Perception* (2), trans. C. Smith, London, Routledge, 1962, p. 372. This citation is inexplicably absent in Landes’s more recent translation (2001).

¹⁹ M. Merleau-Ponty, *Phenomenology of Perception*, cit. p. 392.

pertain to the subject's interiority. In each case, he shows that the subject is never fully transparent to itself and is always affected by elements of passivity, making a complete synthesis of the intuited object impossible: the movement of existence can never be fully captured by the thought that reflects upon it.

Merleau-Ponty characterises the idea of self-transparency of consciousness present in these acts with the term "retrospective illusion", which occurs when "everything that I will later learn about myself is introduced into me as an explicit object".²⁰ It is essential to keep the notion of retrospective illusion in mind, as it becomes one of the concepts Merleau-Ponty uses in describing demonstrative procedures. Mathematical objects – as objects of 'pure thought' – are introduced by Merleau-Ponty through the following self-objection:

It certainly seems necessary then to concede an absolute coinciding of myself with myself, if not in the case of desire or emotion, then at least in the acts of 'pure thought'. If this were the case, then everything we have said above would be thrown into question, and, far from thought appearing as a manner of existing, we would actually belong solely to the domain of thought.²¹

Merleau-Ponty argues that acts of will and feeling always involve the possibility of illusion. We can deceive ourselves about the authenticity of what we desire or feel, and we may later discover that what we believed to be love was, in fact, a fictitious projection and therefore not true love. In the case of 'pure thought' however, error seems impossible. On the contrary, there appears to be a complete coincidence between my act of intending the object and the object itself. This seems particularly evident in mathematical thought, where the properties of objects and the steps of demonstrations appear entirely transparent, and the synthesis underpinning them seems fully intelligible and reproducible in the same way by any subject.²² Merleau-Ponty must therefore grapple with this final stage of thought to avoid conceding to idealism and falling into its problematic

²⁰ Ibid., p. 400.

²¹ Ibid., p. 403.

²² Husserl's phenomenology has attributed two fundamental features to ideal objectivities: omnitemporality and irreality. By 'omnitemporality [*Allzeitlichkeit*]' Husserl means the capacity of ideal objectivities to be intended "and so on" (*immer wieder*) in the same way by any possible subject, without undergoing modification over time. Husserl favored the term "omnitemporality" over the more traditional "timelessness [*Zeitlosigkeit*]" to highlight the connection between ideality and the temporal dimension of lived experience. Cf. Edmund Husserl, *Erfahrung und Urteil, Untersuchungen zur Genealogie der Logik. Ausgearbeitet und Herausgegeben von Ludwig Landgrebe*, ed. by L. Landgrebe, Prague, Academia Verlagbuchhandlung, 1939; trans. J. Churchill and K. Ameriks, *Experience and Judgement*, Routledge, London, 1973, § 64.

conclusions. He must demonstrate that even in the realm of mathematical idealities, there is no identity of thought with itself and that their necessity arises from an act of 'expression' which, as such, introduces a constitutive *distance* between thought and the object expressed.

Amidst the growing specialisation of knowledge and the accompanying philosophical and epistemological analyses, Merleau-Ponty's phenomenological project seeks to offer – fully aware of the inherent risk – a comprehensive theory of the constitution of scientific objectivities in their various forms. This theory begins with perception and examines the different levels of meaning production, such as gesture and language, culminating in the highest products of thought, such as mathematical idealities. This line of inquiry was further developed after *Phenomenology of Perception* and is evident in the project Merleau-Ponty submitted in 1952 to Martial Gueroult for his candidacy at the Collège de France. In this proposal, Merleau-Ponty indicated that he was working on a project entitled *The Origin of Truth*. This work was intended to be a "theory of truth" aimed at developing a genealogy of the constitution of the truth. The theory "was to be constructed around a new idea of expression which was yet to be completed, of an analysis of gestures or the mimetic uses of the body and of all forms of language, to the most sublimated language of mathematics".²³ A theory of truth cannot overlook the analysis of mathematical objects, given their status as a domain of truths in their own right and as the foundation of modern and contemporary physics.

2. Geometric Ideality as *Gestalt*

From the outset, it must be acknowledged that Merleau-Ponty's analyses are unlikely to find fertile ground among professional mathematicians. This is for a very straightforward reason, which does not imply an error on their part. Mathematicians and philosophers of mathematics operate within a specific field of knowledge, using concepts and gestures intrinsic to mathematical discourse.²⁴ However, what is at stake here is

²³ Claude Lefort, *Preface to The Prose of the World*, cit. pp. xii-xiii. The most extensive text in which Merleau-Ponty presents his project on *The Origin of Truth* can be found in M. Merleau-Ponty, *Parcours Deux: 1951-1961*, Verdier, Paris, 2000, pp. 36-48.

²⁴ This is the approach adopted by several phenomenologists who have engaged with such issues, advocating the necessity of a distinctly regional phenomenology. Such a phenomenology situates itself directly within the concepts and language of a specific theoretical field, without seeking its foundation in more 'original' extra-theoretical dynamics. Among the leading proponents of this perspective are Jean-Toussaint Desanti (*Les idéautés mathématiques*, Seuil, Paris, 1968) and Dominique Pradelle (*Intuition et idéautés*,

the rigorous description of all the presuppositions and phenomena taken for *obvious* within work conducted on a given field of ideality. These elements must be described in their transcendental, constitutive, and inescapable value. Among these, the body as a motor subject is very important throughout *Phenomenology of Perception*.

This approach has the merit of opening a given field of knowledge to a broader theory of perception, expression, and truth, rather than confining it within itself. However, its weakness – already noted by some studies²⁵ – lies in Merleau-Ponty's occasional lack of competence in the foundations of mathematics and his consequent insufficient attention to the formal, and thus substantive details of demonstrative procedures. A phenomenological theory of idealities seeking to adopt a Merleau-Pontian framework must undoubtedly be complemented with more specific theoretical tools.²⁶

In *Phenomenology of Perception*, Merleau-Ponty addresses the description of the ideal object of geometry as a model of an act of 'pure thought' (while in *The Prose of the World*, he will turn to algebra). He does so by examining a specific example of a basic theorem's proof: the sum of the interior angles of a triangle, which, as is well known – at least in Euclidean geometry – is equal to the sum of two right angles.

The proof proceeds through a straightforward construction: drawing a line through one of the triangle's vertices and parallel to the opposite side. By applying the theorem of parallel lines cut by a transversal, it becomes possible to demonstrate that the angles adjacent to the vertex where the line was drawn are congruent in pairs with the other two angles of the triangle (since they are alternate interior angles). Therefore, as these three angles lie on the same straight line, their sum forms a straight angle. Consequently, the sum of the interior angles of the triangle is also congruent to a straight angle and thus equal to two right angles.

Merleau-Ponty asserts that the certainty of a demonstration requires a subjective act capable of transcending the "order of phenomena" and

Phénoménologie des objets mathématiques, Puf, Paris, 2020). In my view, there need not be an inherent contradiction between these two phenomenological approaches. Research conducted from "within" a particular practice is essential for providing a compelling and concrete account of how the modes of intuition and constitution of objects occur. Conversely, inquiries that interconnect a specific disciplinary endeavour with its presuppositions can transcend the abstraction characterising any particular regional ontology or theoretical domain, offering a more comprehensive description.

²⁵ Baldwin argued that the issue with Merleau-Ponty's approach lies in his insufficient appreciation of "formal proofs," which, according to Baldwin, would be required by the same Merleau-Ponty's conception of expression. See T. Baldwin, *op. cit.*, p. 325.

²⁶ For example, the outline of a 'Merleau-Pontian epistemology of mathematics' proposed by Pierre Cassou-Noguès (1998, 1999) attempts to integrate Merleau-Ponty's analyses with those of Jean Cavaillès.

the “temporal dispersion of phases of thought”.²⁷ This act allows access to a demonstrative truth that seems independent of these elements, creating the *illusion* of fully intuiting the ideal object as such. While the perceptual figure provides a distance and transcendence that cannot be fully explained by the tools of intellectualistic idealism, the same figure, once idealised, seems to exceed the order of the phenomenal and contingent. It reaches the “order of the *eidos* or of the being”,²⁸ where relationships, as demonstrable entities, are intuitively grasped in their fullness. The regularities common to every concrete or imagined figure seem independent of these figures and, indeed, appear to determine their very structure.

This “act” of idealisation requires several essential elements to perform the transition from the phenomenal to the ideal. It is necessary, quite simply, to perceive the triangle and its concrete physiognomy, to be able to physically (or imaginatively) draw the lines of the construction, to “still-holding-in-grasp” [*Im-Griff-behalten*] a series of pieces of information simultaneously in the retentional chain, so that they can be compared with the final construction. Finally, the process involves formalising everything by detaching the proof from the concrete process that generated it, thereby making it fully valid for all time and for every possible triangle.

To present itself as such (to be constituted) the geometric object requires, as a necessary but not sufficient condition, that the subject who intends it is a motor subject endowed with a body, which thereby assumes a constitutive, transcendental role.²⁹ This does not mean reducing the structures of the object to the noetic or psychological act of intention or to the physical structure of the subject, which would fall back into the confines of empiricism and thus psychologism. Instead, it affirms that the *noematic correlates themselves*, by their own structure, can only be intended within a motor spatiality: “The construction makes explicit the possibilities of the triangle being examined, not according to its defini-

²⁷ M. Merleau-Ponty, *Phenomenology of Perception*, cit. p. 404.

²⁸ Ibid.

²⁹ Jan Halák has particularly emphasised the role of corporeality: “Bodily motricity is involved even in the abstract domain of symbol-based mathematical cognition, as a means of transforming mathematical gestalts and changing our relationship to the cultural symbolic environment consequently. [...] In the abstract domain, motor articulation of phenomenal structures is neither entirely excluded nor reverted to simulating presumably original perceptual experiences; rather, it is ‘sublimated’ into ‘symbolic gesticulation’”. J. Halák, *Mathematics embodied: Merleau-Ponty on geometry and algebra as fields of motor enaction*, cit. p. 28.

tion and as an idea, but according to its configuration and as the pole toward which my movements are directed”.³⁰

For Merleau-Ponty, the notion most appropriate for describing an ideal object is not that of ‘essence’ or ‘pure ideality, but rather *Gestalt*.³¹ This term aims to evoke the idea of a ‘form’, a ‘structure’, or a ‘configuration’ open to various demonstrative possibilities, although constrained by laws inherent to the structure itself. If we could intuit mathematical ideality as a ‘pure essence’ fully transparent, we would not only fall back into the problems of Platonism and intellectualistic idealism discussed in the previous paragraph, but we would also fail to grasp the functioning of the demonstrative dynamics themselves. These dynamics manifest as continuous reconfigurations of preceding forms, which therefore are not fixed or complete but fundamentally open structures. This does not imply total freedom in mathematical work, as Merleau-Ponty is fully aware. The possibilities realised in demonstrations are inscribed within the *Gestalt* of ideality itself.

The construction also relies on spatial concepts such as “‘on’, ‘by’, ‘vertex’, and ‘extend’”,³² which, to *signify*, reference a concrete spatiality from which a series of idealisations can be performed. However, the motor operation of construction (or imaginative operation, equally grounded in the *pure possibility of movement*) can only take place starting from the perceptual structure of the figure itself and its capacity to lend itself to possible operations. These operations are indispensable in the initial process, though retrospectively they are irrelevant to the validity of the formalised proof.

All the described operations and concepts are necessary for the emergence of geometric truth, even – or especially – when the proof is ultimately formalised. In this regard, Merleau-Ponty argues that the necessity of the demonstration is not analytic, stating: “There is no definition of the triangle that contains in advance both the properties that will be demonstrated through what follows and the intermediaries that will be passed through in order to arrive at this demonstration”.³³ The properties discovered through concrete work on the object paradoxically contribute to

³⁰ M. Merleau-Ponty, *Phenomenology of Perception*, cit. p. 405.

³¹ It would be too extensive to recount all the work undertaken by Merleau-Ponty in *Phenomenology of Perception* (as well as in *The Structure of Behaviour*) in his engagement with Gestalt psychology, and thus on the notion of Gestalt. This concept is, as is well known, the key element through which Merleau-Ponty modifies and integrates Husserlian phenomenology. Cf. Luca Taddio, *Merleau-Ponty. L'apparire del senso*, Feltrinelli, Milano, 2024, pp. 8-9.

³² M. Merleau-Ponty, *Phenomenology of Perception*, cit. p. 405.

³³ *Ibid.*, p. 404. Merleau-Ponty follows Kant regarding the synthetic character of mathematics.

constituting the object itself, which becomes an open structure clearly definable (the triangle has a precise definition) yet open to further redefinitions (which are not contained a priori within the definition).

Even when the proof and its components are formalised, the specific determinations of geometric discourse cannot be stripped of their intuitive origin and reference to fundamentally spatial elements, without which they would be incomprehensible. For Merleau-Ponty, formalisation is always a “retrospective”³⁴ act and, as such, can never be entirely complete. It inherently contains the motor operations performed on a particular object and the intuitive components that ‘fill’ [erfüllen] what is formalised. Therefore, there is no analytic deduction of properties from an ideal essence. Instead, the process involves a *synthetic operation* of demonstration that uncovers elements inscribed as possibilities within the *Gestalt* of the geometric object. These elements proliferate through theoretical stratifications. The ideal object thus reveals itself as a “field of possible movements”,³⁵ a pole of concrete transformations without which its properties could never emerge.

3. Mathematics as a Form of ‘Expression’

Particularly in *Phenomenology of Perception*, Merleau-Ponty’s analysis rests on the idea that no formalisation or logical definition, however refined, can “equal the fecundity of the vision of the shape”.³⁶ In other words, he argues that intuitive perception or imagination – such as that of a sphere – is perfectly comprehensible on its own, without recourse to additional constructs. By contrast, its formalisation, whether as a definition or as an equation expressed through Cartesian coordinates, while formally more precise than any physical sphere, drawing, or possible imagination, does not fully present the sphere or make it comprehensible as such unless it is brought back to a perceptual or imaginative dimension. In short, it must return to the intuitive ground from which it originated: “Formal thought is sustained by intuitive thought”.³⁷

I believe that two clear objections arise against this argument: the first concerns how to bring to intuitive givenness mathematical objects that, by their very nature, cannot ultimately be intuitive, such as infinite quantities, without which neither arithmetic nor geometry could be

³⁴ Ibid., p. 405.

³⁵ Ibid., p. 406.

³⁶ Ibid., p. 405.

³⁷ Ibid.

conceived.³⁸ However, Merleau-Ponty's approach does not aim to reduce every formalisation to a supposedly pure or definitive intuitiveness. On the contrary, he seeks to demonstrate that, while intuitive thought may be more 'original', it is equally never self-contained or fully capable of synthesising its objects.

It matters little that formal operations distance themselves from an assumed perceptual purity; the goal is instead to show that neither purity nor transparency ever truly exists, not even after formalisation. Indeed, formalisation generates the "retrospective illusion" of having uncovered a realm of absolute truths. For Merleau-Ponty, formalisation attempts to transcend the distance present in perception but can never fully purify its language, whether in mathematics or any other domain. A '*characteristica universalis*' (Leibniz) or a 'pure logical grammar' or 'eidetic language' (Husserl) are impossible for Merleau-Ponty,³⁹ as even these refer back to an originally instituting dimension of expressive acts. This dimension precedes and is then obscured by formalisation, which merely suggests that the sign perfectly corresponds to the meaning: "The algorithm, the project of a universal language, is a revolt against language in its existing state and a refusal to depend upon the confusions of everyday language."⁴⁰

However, this does not mean formalisation and idealisation should be regarded negatively. This interpretation would betray a profound naivety in Merleau-Ponty's analysis and render it entirely useless. Instead, it underscores that the presuppositions of formalisation prevent us from conceiving of idealities in perfect transparency. The thought remains *distanced* even from objects that exist solely within thought itself, and idealism cannot assert its strength, not even in the domain of pure idealities.

The second objection, closely tied to the first, concerns the capacity of symbolic processes of formalisation to expand the possibilities for creating meaning and presenting objects or relationships that are not intuitively given. Even Husserl, in *Philosophy of Arithmetic*, acknowledged that "symbolic concept formation" – such as those of infinite sets – involves a "strong Idealisation of our powers of representation [*starke Idealisierung unseres Vorstellungsvermögens*]."⁴¹ The process of idealisation and formalisation enables the execution of higher-order operations and the demonstration of properties that could not emerge at a previous level.

³⁸ The topic of the intuitive givenness of infinity is undoubtedly complex and cannot be adequately addressed within the limited scope of this discussion.

³⁹ M. Merleau-Ponty, *The Prose of the World*, cit. p. 16.

⁴⁰ *Ibid.*, p. 5.

⁴¹ E. Husserl, *Philosophie der Arithmetik, Psychologische und logische Untersuchungen* [Hua XII], ed. by L. Eley, M. Nijhof, Den Haag, 1970, p. 223; trans. D. Willard, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht-London-Boston, 2003, p. 236.

Thus, it is possible for certain expressive practices – since symbolisation itself is a form of expression – to serve as foundations for further layers of expression, enabling the *creation of new meanings*.

The critique would be well-founded within the framework of *Phenomenology of Perception* but Merleau-Ponty later acknowledged the importance of symbolic dynamics, placing mathematical elaboration within a broader theory of expression, outlined in *The Prose of the World* and his *Lectures*. At this stage, Merleau-Ponty does not sever ties with the theoretical advances of *Phenomenology of Perception*. He maintains that “the very notion of essence is formed in contact with an imitation of the perceived object [...]: pure being prior to the subject”.⁴² However, now he understands that expressive dynamics themselves are the places where the articulation of meaning is simultaneously a “development of meaning [*devenir du sens*]” and a “becoming-meaning [*devenir sens*]”.⁴³ Merleau-Ponty thus clarifies that his project is not at all to “reduce mathematical evidence to perceptual evidence”, nor to deny “the originality of the order of knowledge vis-à-vis the perceptual order”; but rather to “to loose the intentional web which ties them to one another, to rediscover the paths of the sublimation which preserves and transforms the perceived world into the spoken world.”⁴⁴

The task is to examine the levels at which expressive systems generate new meaning by restructuring the system they belong to and giving rise to new systems, languages, or notations. They retain the *instituting* dimension (*primitive expression/instituting word*) intrinsic to linguistic practice, yet coherent because they are embedded within precise and definable relationships between signs (*algorithmic expression*). Mathematics represents the highest level of this process of expressive *sublimation*, as its language has progressively freed itself from references to the concreteness of the world.

Once we understand the value of formalisation and the intra-theoretical restructuring of a discipline, the problem is not “to show that mathematical thought rests upon the sensible but that it is creative” and that “creativity could also be shown for a formalized mathematics”.⁴⁵ Therefore, mathematical truth must be free from “the perceptual analogy which makes ‘something’ (*etwas überhaupt*) of the mathematical expression.”⁴⁶ Mathematical truth is: “Nothing but the ensemble of relations established

⁴² M. Merleau-Ponty, *The Prose of the World*, cit. p. 123.

⁴³ Ibid., p. 127. The expression “becoming-meaning” is our translation, because the English translation incorrectly does not distinguish between “*devenir du sens*” and “*devenir sens*”, translating both with “development of meaning”.

⁴⁴ Ibid., pp. 123-124.

⁴⁵ Ibid., p. 126.

⁴⁶ Ibid., p. 125.

within it *plus an open horizon of relations that can be constructed*. This horizon is not the mode of presentation of a self-contained mathematical entity; at every moment, there is really nothing in heaven or on earth but the known properties of the integer.”⁴⁷ For Merleau-Ponty, even in *The Prose of the World*, the mathematical object is likened to a *Gestalt*, always open to redefinitions. Mathematical ideality is a continuous intra-theoretical construction that has emerged throughout history through a series of expressive stratifications, which undoubtedly began with perception but are not reducible to it.⁴⁸

Conclusion: Which Path for a Phenomenology of Idealities?

The notion of a continuous redefinition of ideal objects and the rejection of the possibility of their complete intuition is also supported by scholars such as Dominique Pradelle. Following the phenomenological framework of Jean-Toussaint Desanti, he has focused on describing the modes of the constitution of idealities from within the theoretical domain of mathematics itself. Pradelle has argued against any return to a pre-mathematical ground in determining the constitution of idealities and, instead, emphasises the need to examine the intra-theoretical stratifications that always occur within a “particular *mathematical situation*”.⁴⁹ “The modality of *categorical* constitution – Pradelle writes – is the transition from one theoretical situation to another”.⁵⁰ He portrays mathematical idealities as “construction sites [*chantier*] of evolving theorisation”,⁵¹ where demonstrative and formal stratifications continuously redefine the objects they address, stripping them of their static and fixed nature. For Pradelle, the semantic level of the institution of mathematical objects – which entails a creative, non-analytical component – is *intertwined* (*entrelacé*) with the demonstrative dimension, which compels the subject to follow specific pathways. This interplay ensures the ontological autonomy and full objectivity of ideal objects.

I believe that Merleau-Ponty’s position, which describes mathematical ideality as a *Gestalt*, finds significant points of convergence with the appro-

⁴⁷ Ibid.

⁴⁸ “Instead of saying that we establish certain *properties* of mathematical *entities*, we would be more exact if we said that we establish the possibility of the principle of enriching and making more precise the relations that served to define our object, of pursuing the construction of coherent mathematical wholes which our definitions merely outlined”. *Ivi*, p. 122.

⁴⁹ D. Pradelle, *Être et genèse des idéalités*, cit. p. 441 (our translation).

⁵⁰ Ibid., p. 312.

⁵¹ Ibid., p. 245.

ach of phenomenologists like Pradelle. Working from an intra-theoretical perspective, Pradelle emphasises the evolving nature of ideal objects as structures in becoming and the impossibility of pure categorical intuition.⁵² A promising working hypothesis – only outlined here and requiring further exploration through concrete research – might be to pursue a third path, a synthesis of the two approaches. This would avoid both the total reduction of idealities to perceptual dynamics, as Husserl in *Experience and Judgment* and Merleau-Ponty in *Phenomenology of Perception* propose, and the exclusion of any interaction between intra-theoretical and extra-theoretical dynamics. After all, as Merleau-Ponty's later reflections demonstrate, mathematical discourse is one among many expressive forms through which meaning – and therefore the world itself – is constituted.

Bibliography

- Baldwin, Thomas. *Language as the embodiment of geometry*. In R. Jensen & D. Moran (Eds.), *The phenomenology of embodied subjectivity*, Springer, Cham, 2013, pp. 305-327.
- Besmer, Kirk. *Merleau-Ponty's Phenomenology: The Problem of Ideal Objects* (Continuum, New York, 2007).
- Cassou-Noguès, Pierre. *Le problème des mathématiques dans la philosophie de Merleau-Ponty*, in M. Merleau-Ponty, *Notes de cours sur L'Origine de la géométrie de Husserl* (pp. 369–404), Puf, Paris, 1998.
- Cassou-Noguès, Pierre. *Pour une épistémologique merleau-pontienne en mathématiques*, in “Chiasmi International” (1), Mimesis, Milano, 1999, pp. 287-300.
- Desanti, Jean-Toussaint. *Les idéalités mathématiques*, Seuil, Paris, 1968.
- Halàk, Jan. *Mathematics embodied: Merleau-Ponty on geometry and algebra as fields of motor enaction*, in “Synthese” 200, (2022), 34, pp. 1-28.
- Halàk, Jan. *Embodied higher cognition: insights from Merleau-Ponty's interpretation of motor intentionality*, *Phenomenology and the Cognitive Sciences*, n. 22 (2023), pp. 369–397.
- Hass, Michael and Hass, Lawrence. *Merleau-Ponty and The Origin of Geometry*. In F. Evans (Ed.), *Chiasms: Merleau-Ponty's notion of flesh* (pp. 177–187), SUNY Press, Albany, 2000.
- Hass, Lawrence. *Merleau-Ponty's Philosophy*, Indiana University Press, Bloomington, 2008.
- Husserl, Edmund. *Philosophie der Arithmetik, Psychologische und logische Untersuchungen* [Hua XII], Eds. L. Eley, M. Nijhof, Den Haag, 1970; trans. D. Willard, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht-London-Boston, 2003.

⁵² Pradelle has proposed replacing the notion of categorical intuition with that of “categorical fulfilment [*remplissement catégorial*]”. D. Pradelle, *Intuition et idéalités*, cit. p. 469.

- Husserl, Edmund. *Logische Untersuchungen. Erster Teil: Prolegomena zur reinen Logik. Text der 1. und der 2. Auflage* [Hua XVIII]; Eds. E. Holenstein, Nijhoff, Den Haag, 1975; trans. J. N. Findlay, *Logical Investigations*, London-New York, Routledge, 2001.
- Husserl, Edmund. *Logische Untersuchungen. Zweiter Teil: Untersuchungen zur Phänomenologie und Theorie der Erkenntnis. In zwei Bänden* [Hua XIX], ed. by U. Panzer, Nijhoff, Den Haag, 1985; trans. J. N. Findlay, *Logical Investigations*, London-New York, Routledge, 2001.
- Husserl, Edmund. *Erfahrung und Urteil, Untersuchungen zur Genealogie der Logik*. Ausgearbeitet und Herausgegeben von Ludwig Landgrebe; Eds. L. Landgrebe, Prague, Academia Verlagsbuchhandlung, 1939; trans. J. Churchill and K. Ameriks, *Experience and Judgement*, Routledge, London, 1973.
- Lachière-Rey', Pierre. *L'idéalisme kantien*, Alcan, Paris, 1932.
- Lachière-Rey', Pierre. *Le Moi, le Monde et Dieu*, Boivin, Paris, 1938.
- Marannino, Lorenzo. *La 'logica del sensibile' nella fenomenologia di Husserl. La funzione del precategoriale dalle Ricerche logiche a Esperienza e giudizio*, in "Archivio di filosofia" XCII, 1/2024, pp. 201-216.
- Merleau-Ponty, Maurice. *Phenomenologie de la perception*, Gallimard, Paris; trans. D. A. Landes, *Phenomenology of Perception*, Routledge, London-New York, 2012.
- Merleau-Ponty, Maurice. *La Prose du monde*, Gallimard, Paris, 1969; trans. J. O'Neill, *The Prose of the World*, Northwestern University Press, Evanston, 1973.
- Merleau-Ponty, Maurice. *L'institution, la passivité. Notes de cours au Collège de France (1954-1955)*, Belin Éditeur, Paris, 2003; trans. L. Lawlor and H. Massey, *Institution and Passivity*, Northwestern University Press, Evanston, 2010.
- Merleau-Ponty, Maurice. *Notes de cours sur l'Origine de la géométrie chez Husserl*, Puf, Paris, 1998; trans. L. Lawlor and B. Bergo, *Husserl at the Limit of Phenomenology*, Northwestern University Press, Evanston, 2002.
- Merleau-Ponty, Maurice. *Parcours Deux: 1951-1961*, Verdier, Paris, 2000.
- Pradelle, Dominique. *Intuition et idéalités. Phénoménologie des objets mathématiques*, Puf, Paris, 2020.
- Pradelle, Dominique. *Être et genèse des idéalités. Un ciel sans éternité*, Puf, Paris, 2023.
- Taddio, Luca. *Merleau-Ponty. L'apparire del senso*, Feltrinelli, Milano, 2024.

Il problema degli oggetti matematici nella fenomenologia di Merleau-Ponty

L'articolo affronta il problema degli oggetti matematici nella fenomenologia di Merleau-Ponty, mettendo in rilievo il loro ruolo centrale nella sua teoria dell'espressione e della costituzione della verità. Attraverso la critica a empirismo e idealismo, viene mostrato come le idealità matematiche non siano essenze autosufficienti, ma configurazioni (*Gestalten*) costituite da operazioni percettive, motorie e simboliche. La matematica emerge così come forma di espressione capace di generare nuovi significati, senza ridursi né a una derivazione delle proprie strutture dalle legalità dell'esperienza percettiva, né a un puro formalismo. L'articolo conclude proponendo un'ipotesi di sintesi tra approcci fenomenologici "pre-teorici" e "intra-teorici", evidenziando come la prospettiva merleau-pontiana consenta di concepire gli oggetti matematici in chiave dinamica e storica.

PAROLE CHIAVE: Merleau-Ponty, Fenomenologia, Matematica, Idealità, *Gestalt*.

The Problem of Mathematical Objects in Merleau-Ponty's Phenomenology

The article examines the problem of mathematical objects in Merleau-Ponty's phenomenology, emphasising their central role in his theory of expression and the constitution of truth. By analysing his critique of empiricism and idealism, it argues that mathematical idealities are not self-sufficient essences but configurations (*Gestalten*) shaped by perceptual, motor, and symbolic operations. Mathematics thus appears as a form of expression capable of producing new meanings, without reducing itself either to a derivation of its structures from the laws of perceptual experience or to pure formalism. The article concludes by proposing a synthesis between "pre-theoretical" and "intra-theoretical" phenomenological approaches, showing how Merleau-Ponty's perspective allows for a dynamic and historical understanding of mathematical objects.

KEYWORDS: Merleau-Ponty, Phenomenology, Mathematics, Idealities, *Gestalt*.

Riccardo Valenti

Exploring *The Origin of Geometry* Through an Enactivist Lens: An Inquiry into Diachronic Group Formation and Collaborative Dynamics in Real-Time and Phase-Delayed Interactions

Introduction. Key Claims and Expected Outcomes

This essay examines Edmund Husserl's account of the historical and intersubjective formation and transmission of sense, as presented in the *Origin of Geometry*¹. To illuminate these features, I draw on recent developments in enactivist philosophy, in particular the theory of participatory sense-making². I argue that the diachronic and interactive unity of geometry is, for Husserl, the very condition for the constitution and maintenance

¹ E. Husserl, *The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology*, tr. D. Carr, Evanston, Northwestern University Press, 1970, pp. 353-378. The *Origin of Geometry* is the third appendix of the ninth paragraph of the *Crisis* (Hua VI: *Die Krisis der Europäischen Wissenschaften und die Transzendente Phänomenologie. Eine Einleitung in die Phänomenologische Philosophie*, hrsg. W. Biemel, 2. Aufl., Bd. VI, Haag, Martinus Nijhoff, 1962, pp. 365-386). It was written in 1936. Here Husserl actively engages with the problem of transcendental and scientific historicity. This appendix serves as a compendium for a dense passage in which Husserl criticises the mathematisation of nature, as he believes Galileo had initiated it from the dawn of modernity. Following a top-down strategy, Husserl seeks to reach the origins of sense-making by showing how the process of idealisation is rooted in the coordinates of the *Lebenswelt*. The *Origin of Geometry* discusses precisely how geometry may serve as an exemplary case for his argument. This text aroused lively interest from the outset: in 1939 Eugen Fink first edited *Die Frage nach dem Ursprung der Geometrie als intentional-historisches Problem*. Thanks to Derrida's French translation, the *Origin* later became widely known in France. Yet Merleau-Ponty had already commented on the text between 1959 and 1960, during his lectures at the Collège de France, a few years before Derrida's version was published. Another author who repeatedly returned to this text was Bernard Stiegler, who discussed it extensively in his three volumes of *Technics and Time*. Our work will also draw on the reflections of these authors and commentators to rehearse the questions raised by the *Origin*.

² H. De Jaegher, E. Di Paolo, "Participatory Sense-Making. An Enactive Approach to Social Cognition", *Phenomenology and the Cognitive Sciences*, 6, 2007, pp. 487-507.

of the “community of monads,”³ “transcendental intersubjectivity,”⁴ or the “transcendental We,”⁵ that is, the collective foundation and joint commitment of successive generations of geometers. At the same time, only this cooperative obligation—together with its transcendental dimension—can account for the epistemic harmony of geometry as such.

This communal union, Husserl contends, is disclosed only in the temporal unfolding of scientists’ participatory activity, whose collaborative pattern can be grasped through the concepts of sedimentation and reactivation of sense. Geometry and its theorems are therefore a matter of construction, continuous discovery, and intersubjective refinement. Such an effort cannot be compressed into the work of a single geometer, nor entrusted to a single generation alone. Rather, the notions of sedimentation and reactivation point to the constant renewal and continuation of this scientific task as a collective enterprise linking past, present, and future geometers⁶. In the *Origin of Geometry*, institution, sedimentation, and reactivation of sense are inseparable from the technical support of writing. Writing secures the omni-temporal validity of meaning and renders geometrical contents transmissible across indefinite generations of interpreters. Ultimately, Husserl holds that the transcendental value of writing is decisive for understanding the mutual constitution of geometry and geometers in the synergistic process of their joint formation.

1. Historical and Intersubjective Features of Sense Formation and Transmission

Husserl holds that knowledge can only be historically and intersubjectively discovered, revealed by groups of scientists working as members of a collective enterprise⁷. As originaive products of the *Lebenswelt*—the

³ “Monadengemeinschaft” (E. Husserl, *Cartesianische Meditationen und Pariser Vorträge*, hrsg. und eingel. von S. Strasser, 2. Aufl., Haag, Martinus Nijhoff, 1963, p. 158).

⁴ “transzendentaler Intersubjektivität” (ibid.). Cf. E. Husserl, *Cartesian Meditations. An Introduction to Phenomenology*, tr. D. Cairns, Dordrecht, Springer, 1977, p. 130; id., *Zur Phänomenologie der Intersubjektivität. Texte aus dem Nachlass. 3, 1929-1935* (Hua XV), hrsg. von I. Kern, Haag, Martinus Nijhoff, 1973, p. 16.

⁵ B. Stiegler, *Technics and Time, 1. The Fault of Epimetheus*, tr. R. Beardsworth, G. Collins, Stanford, Stanford University Press, 1998, p. 229.

⁶ E. Husserl, *Die Lebenswelt. Auslegungen der Vorgegebenen Welt und ihrer Konstitution. Texte aus dem Nachlass (1916–1937)* (Hua XXXIX), hrsg. von R. Sowa, Dordrecht, Springer, 2008, pp. 348, 359.

⁷ Cf. W. Goris, “L’a priori historique chez Husserl et Foucault (I). La pertinence philosophique d’un concept directeur de l’épistémologie historique”, tr. J. Farges, *Philosophie*, 4 (123), 2014, p. 20; D. Pradelle, *Généalogie de la raison*, Paris, Presses Universitaires de France, 2013, p. 295.

lifeworld he discusses in the *Crisis*—geometrical theorems emerge through the sensible and historical unfolding of research⁸. What is unknown, for Husserl, is historically constituted by individuals operating within a community of geometers⁹. The *Origin of Geometry* underscores the decisive role of language and writing in the formation and dissemination of cumulative human culture¹⁰. Writing makes cultural institutions intelligible for a linguistic community and transforms history and its contents into a transcendental feature. Although geometrical content has always been valid—the Pythagorean theorem, for example, does not begin or cease to be true—its constitution and maintenance within a community of knowers depends on a “historical a priori,”¹¹ concerning both its first manifestation and its intersubjective confirmation¹². Such features are only possible through cumulative techniques of historical formation, which provide continuity across temporal transitions and secure conceptual deposits.

In the *Origin*, Husserl highlights the role of other subjects in shaping, facilitating, and preserving this constructive yet always incomplete process of knowledge formation, made possible by language and writing. Language, he argues, attains enduring validity only when expressed in writing. This is especially clear in geometry, where theorems and demonstrations must be documented in writing in order to be understood and handed down within a living “tradition”¹³ that links past, present, and future contributors through this technical medium¹⁴. The objective ideality of geometry, as Husserl conceives it, is attainable only once

⁸ We should not interpret geometry in a narrow sense here. As Husserl states, he intends geometry as a comprehensive “title” that includes “all disciplines that deal with shapes existing mathematically in pure space-time” (E. Husserl, *The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology*, cit., p. 354). In continuity with this statement, I employ the term “geometers” in a broad sense to designate the various individuals engaged in the constitution of these disciplines.

⁹ Although Husserl occasionally refers to an “inventor” of geometry, i.e., an individual discovering its theorems, this does not compromise the primacy of intersubjectivity that he maintains in his account of geometrical institutions. Truth contents must be expressed in order to acquire a “geometrical existence”; they cannot remain confined to the purely “mental space” of single individuals (E. Husserl, *The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology*, cit., p. 356).

¹⁰ Cf. E. Husserl, *Zur Phänomenologie der Intersubjektivität*, cit., pp. 218–226.

¹¹ E. Husserl, *The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology*, cit., p. 372; L. Landgrebe, “Médiation sur le mot de Husserl: « L’histoire est le fait majeur de l’être absolu »”, *Philosophie*, 3 (110), 2011, p. 41; D. Pradelle, “La constitution des idéautés est-elle une création?”, *Les Études philosophiques*, 2 (85), 2008, p. 236.

¹² R. Shain, “Derrida, Husserl, and the Problem of Prior Sense”, *Cosmos and History: The Journal of Natural and Social Philosophy*, 12 (1), 2016, pp. 292–308.

¹³ L. Landgrebe, “Médiation sur le mot de Husserl”, cit., p. 10.

¹⁴ E. Fink, *Sixth Cartesian Meditation. The Idea of a Transcendental Phenomenology*, tr. R. Bruzina, Bloomington–Indianapolis, Indiana University Press, 1995, pp. 174–176.

written, that is, once its meaning has become sedimented and shareable across space and time, recoverable and reactivable in different historical moments. Geometry and the ongoing idealisation of its findings are therefore permanently under construction and always “perfectible.”¹⁵ The process of idealisation follows the temporal rhythm of a “continuous synthesis” of past and new “acquisitions,” a process that would remain incomprehensible without acknowledging its “persisting manner of being.”¹⁶ Only writing secures this persistence, making further theoretical progress possible.

As Derrida and Stiegler have both stressed in their readings of the Origin, writing makes geometers what they are: inheritors and continuers of an institution of perennial knowledge transmission. Geometers thus form a broader cultural community through writing’s passive “communal”¹⁷ sedimentation and reactivation, made possible by the technical act of fixing content in readable form. Such contents may be retrieved by future geometers from the work of past ones, surviving their creators and transmitted across generations¹⁸. The temporally distributed action of these geometers also contributes to the ongoing constitution of geometry: a sociogenetic yet inherently incomplete cultural process whose temporal and conceptual “solidarity”¹⁹ exceeds the rigid boundaries of immediacy and intuition²⁰. This given, Husserl supports a complementary form of cooperation in his understanding of the infinite, teleological task of geometry and of geometers—a task that resonates with the enactivist account of participatory agency²¹. For Husserl, geometers do not sim-

¹⁵ Y. Thierry, *Conscience et humanité selon Husserl*, Paris, Presses Universitaires de France, 1995, p. 94.

¹⁶ E. Husserl, *The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology*, cit., p. 355.

¹⁷ L. Landgrebe, “Médiation sur le mot de Husserl”, cit., p. 38; E. Husserl, *Cartesian Meditations. An Introduction to Phenomenology*, cit., p. 120; id., *Die Lebenswelt. Auslegungen der Vorgegebenen Welt und ihrer Konstitution. Texte aus dem Nachlass (1916–1937)* (Hua XXXIX), cit., p. 297.

¹⁸ As will be more apparent in the third paragraph of this text, writing as technics also constitutes them as geometers-writers. Indeed, as in the “chain of generations” composing the diachrony of meaning transmission, writing appears to Husserl as the only tool enabling the formation of what Stiegler would later call the cross-generational “community of geometers” (B. Stiegler, *Technics and Time, 2. Disorientation*, tr. by the Board of Trustees of the Leland Stanford Junior University, Stanford, Stanford University Press, 2009, p. 230).

¹⁹ E. Housset, *Personne et sujet selon Husserl*, Paris, Presses Universitaires de France, 1997, p. 179.

²⁰ Reading the Husserlian text, Merleau-Ponty defines geometry in his course at the Collège de France as “the integral of a series of cumulative advances” (M. Merleau-Ponty, *Husserl at the Limits of Phenomenology. Including Texts by Edmund Husserl*, tr. L. Lawlor, B. Bergo, Evanston, Northwestern University Press, 2001, p. 36).

²¹ Cf. E. Husserl, *The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology*, cit., p. 378; id., *Zur Phänomenologie der Intersubjektivität. Texte aus dem Nachlass. 3*,

ply collaborate synchronically in founding knowledge, since synchrony as the mere sum of concurrent efforts cannot account for the temporal duration of geometrical transformation, made possible only through writing, passive sedimentation, and active reappropriation. This process must also be understood diachronically, in light of the constant evolution of a “structural truth,”²² as Merleau-Ponty likewise emphasised.

Thus, in the *Origin of Geometry*, the *episteme* defended by Husserl is one that can only be historically and intersubjectively accomplished²³. Moreover, this knowledge—conserved and retrievable through writing that links multiple temporal layers and successive generations of geometers—evolves precisely through temporal deferral, by virtue of its technical medium²⁴. This, in turn, opens up a new and superior dimension of intersubjectivity, group composition, and epistemic responsibility²⁵. To clarify this further, we shall now confront Husserl’s position with key insights from the contemporary enactivist debate on participatory sense-making.

2. “Processes over Individuals”, Diachrony Over Synchrony

In *The Origin of Geometry*, Husserl shows how ideal contents may be empirically grounded in the *Lebenswelt*, that is, how they may first arise, be created, and take shape within the sensible field of knowledge²⁶. According to this view, the ideal contents of geometry emerge in temporality

1929–1935 (Hua XV), Haag, Martinus Nijhoff, 1973, pp. 378–386; W. Casement, “Husserl and the Philosophy of History”, *History and Theory*, 27 (3), 1988, p. 235.

²² M. Merleau-Ponty, *Husserl at the Limits of Phenomenology. Including Texts by Edmund Husserl*, cit., p. 52.

²³ E. Husserl, *Zur Phänomenologie der Intersubjektivität. Texte aus dem Nachlass. 3, 1929–1935* (Hua XV), cit., pp. 407–413; D. Pradelle, *Généalogie de la raison*, cit., p. 296.

²⁴ Y. Thierry, *Conscience et humanité selon Husserl*, cit., p. 97.

²⁵ I will also draw on Merleau-Ponty, Derrida, and Stiegler’s observations to support this point. However, to my knowledge, Don Ihde is the only author who has explicitly introduced diachrony into the phenomenological or post-phenomenological debate in an original sense. In *Husserl’s Missing Technologies*, Ihde argues that a large-scale phenomenon such as the greenhouse effect is only “diachronically” detectable, since its consequences can be fully understood only by considering “temperature measurements” that are “a few centuries old” and thus exceed the intuitive measurements of a single lifetime (D. Ihde, *Husserl’s Missing Technologies*, New York, Fordham University Press, 2016, p. 80). To grasp this, one must adopt an “instrumental embodied science,” i.e., an “instrumentation” of “primary perception” (ibid., pp. 80, 82), which renders such transgenerational phenomena observable. As we will see, this also holds true for the relation between language and writing, as clarified by the case of *Dokumentierung* in the *Origin of Geometry*.

²⁶ M. Rhéaume, “Husserl, la signification et la morsure du temps”, *Philosophie*, 2 (131), 2016, pp. 47–49.

while referring to eternal principles of epistemic validity. Their discovery is only possible through the passage of time and the joint effort of many individuals cooperating in this task²⁷. Although imperishable, geometrical theorems are nonetheless discovered and invented anew by geometers working together to consolidate their meaning. Because of this ceaseless constitution and continuous revision, they always require intersubjective validation. In the *Origin*, this process of revision is precisely what makes geometry what it is: for Husserl, a transcendental, historical, and modifiable artefact that no solitary geometer could create ex nihilo.

This constitutes the main point of contact between Husserl's account of intersubjectivity and enactivism. According to the dynamics of "joint sense-making,"²⁸ individual agents cannot perform complex tasks entirely "by themselves"; rather, such tasks can only be accomplished "through interaction" with others in "high-level"²⁹ collaborative schemes. For De Jaegher, the kind of "interaction" at stake here is not "reducible to individual actions or intentions" but "installs a relational domain with its own properties."³⁰ Husserl's geometry may thus be taken as a compelling example of the "exemplary significance"³¹ of such a joint-venture model and its relational autonomy. The relational domain of geometrical construction links many geometers in the performance of their proofs and calculations, much as a musical sonata brings together "musicians" who only make sense of the piece "while playing."³² Yet geometry, like music, also binds its participants diachronically: different generations of geometers or performers take turns in the same progressive and cumulative cultural composition.

By diachrony, I mean a non-simultaneous temporal dimension in which sense is constituted through the successive and cumulative contributions of multiple geometers. In this respect, *The Origin of Geometry* highlights the revolutionary notion of a "historical a priori," which, for Husserl, encompasses "everything that exists as historical becoming

²⁷ W. Goris, "L'a priori historique chez Husserl et Foucault (I). La pertinence philosophique d'un concept directeur de l'épistémologie historique", cit., p. 21.

²⁸ T. Fuchs, H. De Jaegher, "Enactive Intersubjectivity: Participatory Sense-Making and Mutual Incorporation", *Phenomenology and the Cognitive Sciences*, 8, 2009, p. 477.

²⁹ H. De Jaegher, "Social Understanding through Direct Perception? Yes, by Interacting", *Consciousness and Cognition*, 18, 2008, pp. 536, 541.

³⁰ H. De Jaegher, "Making Sense in Participation: An Enactive Approach to Social Cognition", in F. Morganti, A. Carassa, G. Riva (eds.), *Enacting Intersubjectivity*, Amsterdam, IOS Press, 2008, p. 39.

³¹ J. Blomberg, "Interpreting the Concept of Sedimentation in Husserl's Origin of Geometry", *Public Journal of Semiotics*, 9 (1), 2019, p. 81; Y. Thierry, *Conscience et humanité selon Husserl*, cit., p. 93.

³² T. Fuchs, H. De Jaegher, "Enactive Intersubjectivity: Participatory Sense-Making and Mutual Incorporation", cit., p. 470.

and having-become or exists in its essential being.”³³ He introduces this idea through the concept of “sedimentation,”³⁴ which designates precisely this process. The “co-consciousness”³⁵ of what is “constructed through human activity” and through boundless sedimentation, Husserl argues, “implies a continuity of pasts which imply one another,”³⁶ a permanence that corresponds to the cultural endurance sedimentation aims to capture. History, thus understood, is “nothing other than the vital movement of the coexistence and interweaving of original formations and sedimentations of meaning,”³⁷ as is the case with geometry as a collective enterprise of knowledge. Such sedimentations are indispensable for meaning to be “stabilized and communicable across space and time,” for they provide “the historical process spanning generations”³⁸ of geometers.

This brings us to a crucial claim defended in this essay: diachrony plays a distinctive role in joint actions such as geometry. While language, as the most basic means of communication, allows geometers to “intersubjectively share”³⁹ discoveries in the immediacy of the present, Husserl argues that only writing allows geometry to constitute itself as such, shaping a genuine “scientific community.” Writing ensures that messages can be recovered and transmitted, enabling them to “pass beyond the individual act and become a cultural object”⁴⁰ that compels recognition across time. In Husserl’s terms, it is this “linguistic embodiment,” writing, that makes the ideality of geometry “valid” and “understandable by all.”⁴¹ It forms an “ideal construction” that can “be understood for all future time and by all coming generations of men and thus be capable of being handed down and reproduced with the identical meaning,” thereby creating an ideal construction “valid with unconditioned generality for all men, all ti-

³³ E. Husserl, *The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology*, cit., p. 372.

³⁴ R. D’Amico, “Husserl on the Foundational Structures of Natural and Cultural Sciences”, *Philosophy and Phenomenological Research*, 42 (1), 1981, p. 11.

³⁵ “mitbewußt” (E. Husserl, *Die Krisis der Europäischen Wissenschaften und die Transzendente Phänomenologie* [Hua VI], cit., p. 379).

³⁶ E. Husserl, *The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology*, cit., p. 371; id., *Cartesian Meditations. An Introduction to Phenomenology*, cit., pp. 125-126.

³⁷ Ibid.

³⁸ J. Blomberg, “Interpreting the Concept of Sedimentation in Husserl’s *Origin of Geometry*”, cit., pp. 79, 81.

³⁹ Ibid., p. 84.

⁴⁰ R. D’Amico, “Husserl on the Foundational Structures of Natural and Cultural Sciences”, cit., p. 12; cf. E. Husserl, *Die Lebenswelt. Auslegungen der Vorgegebenen Welt und ihrer Konstitution. Texte aus dem Nachlass (1916–1937)* (Hua XXXIX), cit., pp. 159-160.

⁴¹ E. Husserl, *The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology*, cit., p. 358; M. Merleau-Ponty, *Husserl at the Limits of Phenomenology. Including Texts by Edmund Husserl*, cit., p. 57.

mes, all peoples.”⁴² Through writing, more complex idealities are generated and preserved across multiple generations of geometers-writers. This establishes a diachronic and participatory dimension of sense-formation irreducible to the work of a single individual, group, or generation.

The same holds true for participatory sense-making as conceived by De Jaegher and Di Paolo. While synchronisation plays a key role in intersubjective engagement—just as language does for Husserl—it is not the only, nor the most refined, form of coordination⁴³. As their analysis of in-phase and phase-delayed behaviour shows, De Jaegher and Di Paolo also stress the complementary importance of desynchronisation, i.e., the possible breakdown and subsequent re-adjustment of coordination between actors over time. Like Husserlian diachrony, desynchronisation foregrounds temporal deferral and distribution as indispensable for understanding the achievements of complex interactions, in which participants co-regulate their behaviour in a back-and-forth dynamic of mutual mirroring and revision. Geometrical meaning, similarly, is continually reshaped through emendation and reinterpretation. With these remarks in place, we can now turn to the textual evidence of the *Origin of Geometry* to substantiate this argument.

3. Group Composition and Maintenance Through Writing

As a collective enterprise, geometry requires intersubjective validation to establish its truths both synchronically and diachronically⁴⁴. This validation becomes possible only once a geometer’s discovery is made visible to others⁴⁵. Fellow geometers, whether contemporaries or successors, can read what has been inscribed in writing and corroborate its correctness, or else correct it without nullifying the sedimented, historical, and structural value of the contribution. Whether confirmed or refuted, the contribution remains part of the ongoing tradition precisely because it appears in a written document⁴⁶. In this way, nothing new emerges except

⁴² Ibid., p. 377.

⁴³ Cf. H. De Jaegher, E. Di Paolo, “Participatory Sense-Making. An Enactive Approach to Social Cognition”, cit., p. 491.

⁴⁴ Cf. J. Blomberg, “Interpreting the Concept of Sedimentation in Husserl’s *Origin of Geometry*”, cit., p. 82; J. Vioulac, *Science et révolution. Recherches sur Marx, Husserl et la phénoménologie*, Paris, Presses Universitaires de France, 2015, p. 164.

⁴⁵ Cf. E. Husserl, *Zur Phänomenologie der Intersubjektivität. Texte aus dem Nachlass. 2, 1921–1928* (Hua XIV), hrsg. von I. Kern, Haag, Martinus Nijhoff, 1973, pp. 136–137, 254.

⁴⁶ Cf. L. E. Cahoone, “The Interpretation of Galilean Science: Cassirer Contrasted with Husserl and Heidegger”, *Studies in History and Philosophy of Science*, 17 (1), 1986, p. 5; D. Pradelle, *Généalogie de la raison*, cit., pp. 297–298.

on the basis of prior knowledge. Developments occur discretely and only through the plurality of interpreters. Written truth-content implicitly refers to an unlimited community of receivers and senders, thereby situating itself within history. These interpreters constitute an ideal sequence of contributors who transcend the immediacy of the present, forming an enduring link with omni-temporal human knowledge and recognising themselves as part of this process teleologically.

As Husserl states in the *Origin of Geometry*, “every science is related to an open chain of generations, to those who work for and with one another, a chain precisely composed of researchers (...) who are accomplishing subjectivity of the whole living science.”⁴⁷ For Husserl, this claim applies to all epistemic contents, understood as inescapably geometrical constructions in which “scientific thinking attains new results based on those already attained, because the new ones serve as the foundation for still others (...) in the unity of a propagative process of transferred meaning.”⁴⁸ Each “stage”⁴⁹ of this construction and transfer of meaning contributes to the teleological project of geometry. Although geometry is a collective enterprise, it does not negate the autonomy of “every researcher,” who operates “on his part of building”⁵⁰ knowledge, while nonetheless keeping the larger goal in view. Here, “successive and superior meaning is grounded upon meaning,” as “the earlier meaning gives something of its validity to the later one” and “becomes part of it.”⁵¹ According to Husserl, sciences are instituted and endure through history, passive sedimentation, and tradition, out of which arises an “activity of producing new structures of meaning” that in turn sediment and become “working materials”⁵² for further inquiries.

Husserl emphasises the aprioristic role of history and technics in the formation and perpetuation of cumulative human culture. Complex

⁴⁷ Commenting on this passage, Merleau-Ponty speaks of an “open chain of researchers” whose “relationship” is possible via the verbal transmission of knowledge (M. Merleau-Ponty, *Husserl at the Limits of Phenomenology. Including Texts by Edmund Husserl*, cit., pp. 24, 26).

⁴⁸ E. Husserl, *The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology*, cit., p. 362; W. Goris, “La priori historique chez Husserl et Foucault (I). La pertinence philosophique d’un concept directeur de l’épistémologie historique”, cit., p. 15.

⁴⁹ Ibid.; E. Husserl, *Zur Phänomenologie der Intersubjektivität. Texte aus dem Nachlass. 3, 1929–1935* (Hua XV), cit., pp. 593–596; id., *Die Lebenswelt. Auslegungen der vorgegebenen Welt und ihrer Konstitution. Texte aus dem Nachlass (1916–1937)* (Hua XXXIX), cit., pp. 319–320.

⁵⁰ Ibid.; cf. Y. Thierry, *Conscience et humanité selon Husserl*, cit., p. 111.

⁵¹ The rising ideality content “supports itself on the landmark of inherited geometry and its oldest forms” for the sense here at stake “is undivided between us and the past” (M. Merleau-Ponty, *Husserl at the Limits of Phenomenology. Including Texts by Edmund Husserl*, cit., p. 28).

⁵² Ibid., pp. 368–369; E. Husserl, *Zur Phänomenologie der Intersubjektivität. Texte aus dem Nachlass. 3, 1929–1935* (Hua XV), cit., pp. 510–513.

meanings can only develop through sedimentation and the cooperation of individuals across generations. Yet how do generations connect, initiating and continuing this open chain of research? How can a new generation recover and take over what the previous one achieved? Is oral language sufficient to enable such intergenerational coordination? For Husserl, it is not. Later generations of geometers can connect with their predecessors only through writing and reading—the fundamental technique of inheritance. Writing confers extension and stability upon what geometers aim to express. Unlike oral language, which enables only synchronic communication, writing allows for both synchronic and diachronic contact between generations of interpreters⁵³.

Moreover, writing accomplishes more. The materiality of the support itself enables geometers-writers to form a community of contributors linked across generations in an uninterrupted diachronic unity⁵⁴. This “supplement,”⁵⁵ as Derrida’s reading underscores, acquires a certain autonomy over the individuals who constitute it. Writing thus allows geometers to enter and remain within the field of contributors. Oral language alone is insufficient to establish this cultural dimension: it lacks the capacity to ensure enduring communication that outlives its speakers⁵⁶.

⁵³ Cf. E. Husserl, *Cartesian Meditations. An Introduction to Phenomenology*, cit., p. 126. Stiegler clarifies this by speaking of a “technical continuity” of the “milieu” in which invention takes place (B. Stiegler, *Technics and Time, 1. The Fault of Epimetheus*, tr. R. Beardsworth, G. Collins, Stanford, Stanford University Press, 1998, p. 61). This concerns writing as a technical enhancement of memory and knowledge in general, once it reaches the stage of “exteriorisation” (B. Stiegler, *Technics and Time, 2. Disorientation*, cit., p. 54), thereby attaining a “new diachrony” of sense perseverance (ibid., p. 110). For Stiegler, diachrony allows human knowledge to be understood “in terms of the evolution of the living being and, beyond that, of the living being’s non-living creations,” as is the case for the transgenerational constitution of geometrical meaning (ibid., p. 163) and for their “undetermined” being (B. Stiegler, *Technics and Time, 3. Cinematic Time and the Question of Malaise*, tr. Board of Trustees of the Leland Stanford Junior University, Stanford, Stanford University Press, 2011, p. 163).

⁵⁴ Cf. J. Blomberg, “Interpreting the Concept of Sedimentation in Husserl’s *Origin of Geometry*”, cit., p. 82; J. Vioulac, *Science et révolution. Recherches sur Marx, Husserl et la phénoménologie*, cit., p. 164.

⁵⁵ J. Blomberg, “Interpreting the Concept of Sedimentation in Husserl’s *Origin of Geometry*”, cit., p. 90; J. Derrida, *Edmund Husserl’s Origin of Geometry. An Introduction*, cit., p. 88.

⁵⁶ E. Husserl, *The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology*, cit., p. 360; J. Derrida, *Edmund Husserl’s Origin of Geometry. An Introduction*, cit., pp. 87-88: according to Husserl, without “the ultimate objectification that writing permits, all language would as yet remain captive of the de facto and actual intentionality of a speaking subject or community of speaking subjects.” Conversely, “by absolutely virtualising dialogue, writing creates a kind of autonomous transcendental field from which every present subject can be absent” (ibid.).

As Husserl observes, what oral expression lacks is “the persisting existence of the ideal objects even during periods in which the inventor and his fellows are no longer wakefully so related or even are no longer alive,”⁵⁷ when the geometer can no longer demonstrate her discovery directly⁵⁸. Writing, as a technical tool, enables geometers to sediment their findings, making them retrievable and reactivable when needed. Writing thus results in a process of “communalisation”⁵⁹ binding geometers together in their work. It is an “infiniteisation,”⁶⁰ a cultural and technical enhancement of our capacities that overcomes the “finitude of the individual and even the social capacity”⁶¹ for storing and transmitting data. According to Husserl, the “important function of written, documenting linguistic expression is that it makes communications possible without immediate and mediate personal address,” rendering them “virtual”⁶² and transmissible at any time.

“Through this,” that is, through writing, Husserl claims, “the communalisation of man is lifted to a new level”⁶³ of complexity—a level that oral transmission could never achieve. Writing permits the constitution of a composite “ideality that no one alone has ever thought,”⁶⁴ as Merleau-Ponty also argued. Writing allows content to be sedimented without losing its efficacy

⁵⁷ E. Husserl, *The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology*, cit., p. 360.

⁵⁸ Merleau-Ponty supports this interpretation, as Derrida will too a few years later. According to Merleau-Ponty, writing allows the extension of validity to what is no longer intuitively present; it ensures the “permanence of the ideal outside of all conversation” and this “even when the interlocutors are dead” (M. Merleau-Ponty, *Husserl at the Limits of Phenomenology. Including Texts by Edmund Husserl*, cit., pp. 24-25). “[T]exts”, i.e., written things, correspond to a “subterranean communication across time” and “convey their sense as an activity which has fallen into obscurity but which is reawakened and which can again be transformed into activity” (ibid., pp. 27, 29). Derrida echoes these considerations: in his lecture, writing assures the “absolute ideal objectivity” of the object itself (J. Derrida, *Edmund Husserl’s Origin of Geometry. An Introduction*, cit., p. 87). As he states in the Introduction, writing “will do this by emancipating sense from its actually present evidence for a real subject and from its present circulation within a determined community” (ibid., pp. 87, 91).

⁵⁹ E. Husserl, *The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology*, cit., p. 364; id., *Cartesian Meditations. An Introduction to Phenomenology*, cit., p. 128. “Vergemeinschaftung” (E. Husserl, *Die Krisis der Europäischen Wissenschaften und die Transzendente Phänomenologie* [Hua VI], cit., p. 374; cf. id., *Cartesianische Meditationen und Pariser Vorträge* [Hua I], p. 156). See also E. Husserl, *Zur Phänomenologie der Intersubjektivität. Texte aus dem Nachlass. 2, 1921–1928* (Hua XIV), cit., pp. 523-530, on the properties of “Paarung”.

⁶⁰ “Verunendlichung” (E. Husserl, *Die Krisis der Europäischen Wissenschaften und die Transzendente Phänomenologie* [Hua VI], cit., p. 375).

⁶¹ Ibid., p. 365.

⁶² Ibid., pp. 360-361.

⁶³ Ibid., p. 361; cf. E. Housset, *Personne et sujet selon Husserl*, cit., pp. 203-204.

⁶⁴ M. Merleau-Ponty, *Husserl at the Limits of Phenomenology. Including Texts by Edmund Husserl*, cit., p. 57.

in the present. In reading written signs, we reawaken what lies sedimented in books, transforming the original intentions of their authors and granting them new life and richer sense. Language embodied in writing does not, as Merleau-Ponty remarked, become “congealed speech,” a fixed possession; rather, it serves as the “transporter of meaning,”⁶⁵ making meaning meaningful. Sciences embodied in this way “are not handed down ready-made in the form of documented sentences”; instead, they involve “a lively, productively advancing formation of meaning, which always has the documented as a sediment of an earlier production.”⁶⁶ This living, participatory account of meaning ensures “continuity from one person to another” and, equally, “from one time to another,”⁶⁷ across successive generations of researchers⁶⁸.

4. Participatory Sense-Making. Interactive Synchronisation and Desynchronisation in Sense Formation

As we delve into geometric knowledge, whether through reading or writing, it becomes evident that we are not merely isolated individuals but

⁶⁵ Ibid., p. 78.

⁶⁶ E. Husserl, *The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology*, cit., p. 365.

⁶⁷ Ibid., p. 366.

⁶⁸ Commenting on the *Phenomenology of Internal Time-Consciousness*, Stiegler identifies a third form of retention, namely the “material inscription of memory in mnemotechnical systems” (B. Stiegler, *Technics and Time, 3. Cinematic Time and the Question of Malaise*, cit., p. 4), such as books or papers. This form of retention defines the “collective memory qua patrimony” (id., *Technics and Time, 1. The Fault of Epimetheus*, cit., p. 98), that is, a collective mnemonic possession and accountability. Patrimony is a historical feature that constantly expands as time goes on—and geometers, crucially, have historically contributed to its advancement. In the case of geometry, the heritage of culture does not coincide with a single momentary achievement but with the “enchainment” of geometrical evolution within the reference system (B. Stiegler, “Genèse d’une philosophie du dilemme phénoménologique. Sur le problème de la genèse dans la philosophie de Husserl de Jacques Derrida”, *Papiers du Collège International de Philosophie*, 14, 2007, p. 15). This enchainment enlarges the dimension of the present. Once again, such transformation is made possible through writing and the documentation it provides. Through writing, knowledge becomes accessible, historical, and immediately communal. Knowledge is transmitted to heirs for the realization of the “intersubjective transcendence” governing the “community of geometers” across the ages (B. Stiegler, *Technics and Time, 3. Cinematic Time and the Question of Malaise*, cit., p. 230; cf. M. Merleau-Ponty, *Husserl at the Limits of Phenomenology. Including Texts by Edmund Husserl*, cit., p. 47). This takes place through the formation of a “transcendental We” forged by “written expressions,” aiming at an ideal sense collectively shared by multiple subjects. To become a “We,” geometers must depart from “egological monadicity and finally find, in tertiary memory, a certain (re)constitutivity in which present-time-consciousness and past-past-time-consciousness can coincide” (B. Stiegler, *Technics and Time, 1. The Fault of Epimetheus*, cit., p. 229). This process leads to the constitution of larger cross-generational scientific communities, which surpass the contributions of individual researchers.

integral parts of a vast, cross-generational “community of scientists as a community of knowledge living in the unity of common responsibility.”⁶⁹ We share the obligation of preserving and advancing collective understanding without losing the “univocity of linguistic expression” and the duty of “taking over from others what is to be taken over”⁷⁰ in order to build new and consequent knowledge. Recognising our place within this continuum of geometric expertise instils a specific sense of belonging: we are not only readers and writers but also partners and heirs of geometrical meaning. This collective enterprise allows us to accomplish more than we could as individuals, underscoring geometry’s communal nature as a process of perpetual innovation. It embodies the “new level”⁷¹ humanity has reached through writing and the transgenerational communalisation that it makes possible⁷². Thanks to the ongoing process of sedimentation and reawakening of meaning, we can, as Husserl notes, overcome the dangers of “vocational interruptions and time out for rest,” which otherwise expose “every researcher” to the “constant danger”⁷³ of losing meaning across generations.

It follows that the continuous, intersubjective synthesis of new attainments takes precedence over the individuals who contribute to its cultural development⁷⁴. This is one of the most significant outcomes of group constitution and mutual comprehension through writing. Its technical instrumentality enables precisely this diachronic form of knowledge, sustained over time. As geometers, we understand our fellows’ actions within this practice and expect others to take the same responsibility that we assume in our work⁷⁵. Writing makes such temporal linkage possible: through interruptions, sedimentation, and reactivation, new groups of researchers can retrieve and build upon the results of their predecessors.

⁶⁹ E. Husserl, *The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology*, cit., p. 362; id., *Cartesian Meditations. An Introduction to Phenomenology*, cit., p. 129; M. Rhéaume, “Husserl, la signification et la morsure du temps”, *Philosophie*, 2 (131), 2016, p. 51.

⁷⁰ *Ibid.*

⁷¹ *Ibid.*, p. 361.

⁷² Cf. E. Husserl, *Zur Phänomenologie der Intersubjektivität. Texte aus dem Nachlass*. 2, 1921–1928 (Hua XIV), cit., p. 409.

⁷³ E. Husserl, *The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology*, cit., pp. 362–363; cf. id., *Zur Phänomenologie der Intersubjektivität. Texte aus dem Nachlass*. 3, 1929–1935 (Hua XV), cit., p. 171; L. Landgrebe, “Méditation sur le mot de Husserl : « L’histoire est le fait majeur de l’être absolu »”, *Philosophie*, 3 (110), 2011, p. 45.

⁷⁴ Cf. J. Vioulac, *Science et révolution. Recherches sur Marx, Husserl et la phénoménologie*, cit., p. 177.

⁷⁵ E. Husserl, *The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology*, cit., p. 26; cf. L. Landgrebe, “Méditation sur le mot de Husserl : « L’histoire est le fait majeur de l’être absolu »”, cit., p. 40.

At this point, it is useful to turn to the enactivist theory of participatory sense-making, which offers a contemporary framework to interpret Husserl's insights on the constitution of scientific communities. *Participatory sense-making* distances itself from the classical *Theory Theory* and *Simulation Theory* of social cognition, which prove insufficient because they neglect interaction, embodiment, and development in understanding others' actions⁷⁶. Both approaches observe behaviour from a detached, third-person stance: they focus too narrowly on "which capacity follows which in time," without considering how capacities emerge dynamically from interaction. In contrast, participatory sense-making holds that social understanding and feedback are not reducible to the static "snapshot activities of one individual's theorising or simulating,"⁷⁷ but arise instead in the moment-to-moment interaction of two or more subjects. As De Jaegher puts it, the "process of interacting" must be considered "as a whole as it unfolds in time."⁷⁸

Such processes display "self-maintaining tendencies"⁷⁹; they are "autopoietic"⁸⁰ and hold an "autonomy"⁸¹ with respect to the individuals who participate in them—just as the communal constitution of geometrical meaning cannot be reduced to the contributions of individual researchers. Participatory sense-making thus aims to capture the intelligibility of multifaceted interactions that remain opaque when analysed only from the perspective of isolated mechanisms.

⁷⁶ The former relies on an "innate or acquired theory of how people generally behave, enabling us to make inferences about their mental states or beliefs"; in contrast, the latter claims that "we have no need for a theory like this because we have an inner model that we can use for simulating another person's mental states, and this model is our mind" (T. Fuchs, H. De Jaegher, "Enactive Intersubjectivity: Participatory Sense-Making and Mutual Incorporation", *Phenomenology and the Cognitive Sciences*, 8, 2009, pp. 467-468). This echoes what De Jaegher also stresses in another paper, where she denounces that "psychologists and cognitive scientists seem generally not aware of, or take for granted, the importance of the interaction process for social cognition, and focus instead on individual capacities" (H. De Jaegher, "Making Sense in Participation: An Enactive Approach to Social Cognition", in F. Morganti, A. Carassa, G. Riva [eds.], *Enacting Intersubjectivity*, Amsterdam, IOS Press, 2008, p. 34).

⁷⁷ *Ibid.*, p. 466.

⁷⁸ H. De Jaegher, "Social Understanding through Direct Perception? Yes, by Interacting", *Consciousness and Cognition*, 18, 2009, p. 535.

⁷⁹ H. De Jaegher, "Making Sense in Participation: An Enactive Approach to Social Cognition", *cit.*, p. 38; H. De Jaegher, T. Froese, "On the Role of Social Interaction in Individual Agency", *Adaptive Behavior*, 17 (5), 2009, p. 448.

⁸⁰ H. De Jaegher, T. Froese, "On the Role of Social Interaction in Individual Agency", *cit.*, p. 447.

⁸¹ H. De Jaegher, E. Di Paolo, "Participatory Sense-Making. An Enactive Approach to Social Cognition", *cit.*, p. 485; H. De Jaegher, "Making Sense in Participation: An Enactive Approach to Social Cognition", *cit.*, pp. 35, 38; H. De Jaegher, T. Froese, "On the Role of Social Interaction in Individual Agency", *cit.*, p. 449; T. Fuchs, H. De Jaegher, "Enactive Intersubjectivity: Participatory Sense-Making and Mutual Incorporation", *cit.*, p. 471; E. C. Cuffari, E. Di Paolo, H. De Jaegher, "From Participatory Sense-Making to Language: There and Back Again", *Phenomenology and the Cognitive Sciences*, 14, 2015, p. 1098.

A simple everyday example helps to illustrate this point: when two agents cross a narrow corridor, perfect and timeless synchronisation of their actions would result in an undifferentiated, homogeneous state—useless for resolving the practical problem of who passes first⁸². Instead, effective coordination requires desynchronisation: agents must “lean into the feedback and feed-forward cycles of the interaction,” where the process itself becomes leading over the individuals, and time becomes crucial for the solution. Here, the interaction has a history of its own, with a relational domain in which “meanings emerge, become aligned, change, and so on through the interpersonal coordination of movements.”⁸³ In this sense, individuals “co-emerge as interactors contemporaneously with the interaction.”⁸⁴

De Jaegher and Di Paolo stress that we must move beyond models of cooperation that treat interaction as a mere aggregation of individual mechanisms⁸⁵. Rather, the focus should be on interactive processes themselves, which sustain mutual knowledge and its evolution. Interactions, they argue, are “extended in time with a rich structure that is only apparent at the relational level of collective dynamics”⁸⁶—precisely as in Husserl’s account of geometry as a diachronic cultural achievement. Coordination within a group becomes possible only when members synchronise and desynchronise their behaviours in order to construct something durable and autonomous beyond the momentary contribution of individuals⁸⁷. This concept of coordination is crucial because it enables us to understand “social interaction as an ongoing process.”⁸⁸

In this sense, we must go beyond a view that reduces interaction to “the spatiotemporal coincidence of two agents that influence each other.”⁸⁹ Instead, we should endorse a diachronic and distributed understanding, one in which “patterns of coordination can directly influence the continuing disposition of the individuals involved to sustain or modify their encounter”⁹⁰ according to emerging needs.

⁸² Cf. H. De Jaegher, T. Fuchs, “Enactive Intersubjectivity: Participatory Sense-Making and Mutual Incorporation”, cit., p. 449.

⁸³ Ibid.

⁸⁴ H. De Jaegher, “Making Sense in Participation: An Enactive Approach to Social Cognition”, cit., p. 38. Here, as De Jaegher points out, “individual sense-making” acquires a particular “coherence through interaction” (Ibid., p. 41).

⁸⁵ Cf. H. De Jaegher, “Making Sense in Participation: An Enactive Approach to Social Cognition”, cit., p. 36; E. Di Paolo, H. De Jaegher, “Participatory Sense-Making. An Enactive Approach to Social Cognition”, cit., p. 36.

⁸⁶ Ibid., p. 37.

⁸⁷ Ibid., p. 38.

⁸⁸ H. De Jaegher, E. Di Paolo, “Participatory Sense-Making. An Enactive Approach to Social Cognition”, cit., p. 491.

⁸⁹ Ibid., p. 492.

⁹⁰ Ibid., p. 491. Their engagement “enacts a world” capable of the “generation of new

Conclusion. Communalization Through Loss and Regain of Sense Coordination. Disclosing the Uninterrupted Continuity of Science

Like geometry, shared actions unfold through trial and error, sedimentation, and progressive reactivation. Even when coordination breaks down—as in the case of two agents crossing a corridor—actors can “synchronize otherwise,”⁹¹ fulfilling the task through alternative adjustments. This is exemplified by the game of charades⁹². Rarely do players immediately guess what another intends to express; instead, they engage in a longer process that requires a series of increasingly refined, “phase-delayed”⁹³ attempts. In such cases, “[s]ustained interactions ... can be expected to have undergone several instances of loss and regain of coordinating structures, each of them leaving the interactors slightly better able to remain in such interaction or reinitiate it,”⁹⁴ thereby continuously improving their performance through repeated interaction. In charades, as in geometry, “participation is highest when we find the sophisticated case in which we fully and directly participate in a joint process of sense-making and the whole sense-making activity becomes a shared one.”⁹⁵

Shared meaning thus evolves through both coordination and breakdowns⁹⁶. Within participatory sense-making, breakdowns are not failures to be eliminated but necessary steps that enable better coordination in subsequent tasks. When such ruptures occur, actors co-regulate through the “double feedback”⁹⁷ of their actions, establishing new and richer connections thanks to the plasticity of the means available for mutual understanding⁹⁸.

meaning” (H. De Jaegher, “Making Sense in Participation: An Enactive Approach to Social Cognition”, cit., p. 35).

⁹¹ H. De Jaegher, “Making Sense in Participation: An Enactive Approach to Social Cognition”, cit., p. 37.

⁹² H. De Jaegher, E. Di Paolo, “Participatory Sense-Making. An Enactive Approach to Social Cognition”, cit., p. 500.

⁹³ Ibid.

⁹⁴ Ibid., p. 496.

⁹⁵ Ibid., p. 497.

⁹⁶ Cf. Ivi., p. 501; cf. H. De Jaegher, “Making Sense in Participation: An Enactive Approach to Social Cognition”, cit., p. 41.

⁹⁷ H. De Jaegher, “Making Sense in Participation: An Enactive Approach to Social Cognition”, cit., p. 44.

⁹⁸ As Cuffari, Di Paolo and De Jaegher observe, the “recovery of interactive breakdowns requires a co-regulation of the interactive coupling. This co-regulation is directed at managing the mismatches” that may occur in social agency (E. C. Cuffari, E. Di Paolo, H. De Jaegher, “From Participatory Sense-Making to Language: There and Back Again”, *Phenomenology and the Cognitive Sciences*, 14, 2015, p. 1011). As a result of this remedy, “successful social acts also tend to crystallize and be used as the starting point of new searches for conflict resolution”, and successful social acts, in turn, “can become recursive regulators of other social acts” (Ibid., pp. 1011-1012).

As charade sequences show, apparent misunderstandings are integral to the game: participants pursue the same task differently, but ultimately converge on a shared goal⁹⁹. This process generates “a dynamic whereby one bumps into the other’s shadow,” creating “a temporally extended whole”¹⁰⁰ in which “[r]eparation becomes a key process”¹⁰¹ of coordination.

This recursive pattern of breakdown and renewal mirrors the way geometry advances through writing. The endless reactivation of geometrical sense exemplifies what participatory sense-making brings to light: the historicity and modifiability of ideal contents, such as theorems, which require intersubjective validation to gain binding force. Through the teleological unity that writing secures, geometers diachronically constitute an unbroken research chain, corroborating their findings and ensuring their transmissibility. Writing, in this respect, is not a mere auxiliary but a physical and technical medium that recovers a fundamental transcendental and historical function in Husserl’s work. It allows us to grasp the autonomy of geometry as a science that develops across generations without losing continuity, as a discipline that evolves through the deferred yet cumulative interactions of its contributors. This, ultimately, discloses the uninterrupted growth of geometrical idealisation and the communal affirmation of science as an intergenerational, shared task.

References

- Blomberg, J., “Interpreting the Concept of Sedimentation in Husserl’s Origin of Geometry”, *Public Journal of Semiotics*, 9 (1), 2019, pp. 78–94.
- Cahoone, L. E., “The Interpretation of Galilean Science: Cassirer Contrasted with Husserl and Heidegger”, *Studies in History and Philosophy of Science*, 17 (1), 1986, pp. 1–21.
- Casement, W., “Husserl and the Philosophy of History”, *History and Theory*, 27 (3), 1988, pp. 229–240.
- Cuffari, E. C., Di Paolo, E., De Jaegher, H., “From Participatory Sense-Making to Language: There and Back Again”, *Phenomenology and the Cognitive Sciences*, 14, 2015, pp. 1089–1125.
- D’Amico, R., “Husserl on the Foundational Structures of Natural and Cultural Sciences”, *Philosophy and Phenomenological Research*, 42 (1), 1981, pp. 5–22.

⁹⁹ Cf. H. De Jaegher, T. Froese, “On the Role of Social Interaction in Individual Agency”, cit., p. 455.

¹⁰⁰ Ibid.

¹⁰¹ T. Fuchs, H. De Jaegher, “Enactive Intersubjectivity: Participatory Sense-Making and Mutual Incorporation”, cit., p. 479.

De Jaegher, H., “Social Understanding through Direct Perception? Yes, by Interacting”, *Consciousness and Cognition*, 18, 2009, pp. 535–542.

De Jaegher, H., “Making Sense in Participation: An Enactive Approach to Social Cognition”, in F. Morganti, A. Carassa, G. Riva (eds.), *Enacting Intersubjectivity*, Amsterdam: IOS Press, 2008, pp. 33–47.

De Jaegher, H., Di Paolo, E., “Participatory Sense-Making. An Enactive Approach to Social Cognition”, *Phenomenology and the Cognitive Sciences*, 6, 2007, pp. 487–507.

De Jaegher, H., Froese, T., “On the Role of Social Interaction in Individual Agency”, *Adaptive Behavior*, 17 (5), 2009, pp. 444–460.

Derrida, J., *Edmund Husserl's Origin of Geometry: An Introduction*, trans. J. P. Leavey, Lincoln–London: University of Nebraska Press, 1978.

Fink, E., *Sixth Cartesian Meditation. The Idea of a Transcendental Phenomenology*, trans. R. Bruzina, Bloomington–Indianapolis: Indiana University Press, 1995.

Fuchs, T., De Jaegher, H., “Enactive Intersubjectivity: Participatory Sense-Making and Mutual Incorporation”, *Phenomenology and the Cognitive Sciences*, 8, 2009, pp. 465–486.

Goris, W., “L'a priori historique chez Husserl et Foucault (I). La pertinence philosophique d'un concept directeur de l'épistémologie historique”, trans. J. Farges, *Philosophie*, 123 (4), 2014, pp. 3–27.

Housset, E., *Personne et sujet selon Husserl*, Paris: Presses Universitaires de France, 1997.

Husserl, E., *Die Krisis der Europäischen Wissenschaften und die Transzendente Phänomenologie. Eine Einleitung in die Phänomenologische Philosophie* (Hua VI), hrsg. v. W. Biemel, 2. Aufl., Den Haag: Martinus Nijhoff, 1962.

Husserl, E., *Cartesianische Meditationen und Pariser Vorträge* (Hua I), hrsg. u. eingel. v. S. Strasser, 2. Aufl., Den Haag: Martinus Nijhoff, 1963.

Husserl, E., *Zur Phänomenologie der Intersubjektivität. Texte aus dem Nachlass. Zweiter Teil: 1921–1928* (Hua XIV), hrsg. v. I. Kern, Den Haag: Martinus Nijhoff, 1973.

Husserl, E., *Zur Phänomenologie der Intersubjektivität. Texte aus dem Nachlass. Dritter Teil: 1929–1935* (Hua XV), hrsg. v. I. Kern, Den Haag: Martinus Nijhoff, 1973.

Husserl, E., *Cartesian Meditations. An Introduction to Phenomenology*, trans. D. Cairns, Dordrecht: Springer, 1977.

Husserl, E., *The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology*, trans. D. Carr, Evanston: Northwestern University Press, 1970.

Husserl, E., *Die Lebenswelt. Auslegungen der Vorgegebenen Welt und ihrer Konstitution. Texte aus dem Nachlass (1916–1937)* (Hua XXXIX), hrsg. v. R. Sowa, Dordrecht: Springer, 2008.

Landgrebe, L., “Médiation sur le mot de Husserl: « L’histoire est le fait majeur de l’être absolu »”, *Philosophie*, 110 (3), 2011, pp. 31–55.

Merleau-Ponty, M., *Husserl at the Limits of Phenomenology. Including Texts by Edmund Husserl*, trans. L. Lawlor, B. Bergo, Evanston: Northwestern University Press, 2001.

Merleau-Ponty, M., *Institution and Passivity. Course Notes from the Collège de France (1954–1955)*, foreword C. Lefort, trans. L. Lawlor, H. Massey, Evanston: Northwestern University Press, 2010.

Pradelle, D., “La constitution des idéalités est-elle une création ?”, *Les Études philosophiques*, 85 (2), 2008, pp. 227–251.

Pradelle, D., *Généalogie de la raison*, Paris: Presses Universitaires de France, 2013.

Rhéaume, M., “Husserl, la signification et la morsure du temps”, *Philosophie*, 131 (2), 2016, pp. 36–51.

Shain, R., “Derrida, Husserl, and the Problem of Prior Sense”, *Cosmos and History: The Journal of Natural and Social Philosophy*, 12 (1), 2016, pp. 292–308

Stiegler, B., *Technics and Time, 1. The Fault of Epimetheus*, trans. R. Beardsworth, G. Collins, Stanford: Stanford University Press, 1998.

Stiegler, B., “Genèse d’une philosophie du dilemme phénoménologique. Sur le problème de la genèse dans la philosophie de Husserl de Jacques Derrida”, *Papiers du Collège International de Philosophie*, 14, 2007, pp. 1–24.

Stiegler, B., *Technics and Time, 2. Disorientation*, trans. Board of Trustees of the Leland Stanford Junior University, Stanford: Stanford University Press, 2009.

Stiegler, B., *Technics and Time, 3. Cinematic Time and the Question of Malaise*, trans. Board of Trustees of the Leland Stanford Junior University, Stanford: Stanford University Press, 2011.

Thierry, Y., *Conscience et humanité selon Husserl*, Paris: Presses Universitaires de France, 1995.

Vioulac, J., *Science et révolution. Recherches sur Marx, Husserl et la phénoménologie*, Paris: Presses Universitaires de France, 2015.

Esplorare l'“Origine della geometria” attraverso una prospettiva enattivista: un'indagine sulla formazione dei gruppi diacronici e sulle dinamiche collaborative nelle interazioni in tempo reale e a fase ritardata

Il saggio indaga l'*Origine della geometria* di Edmund Husserl attraverso la prospettiva dell'enattivismo, con particolare attenzione alla teoria del participatory sense-making. Sottolineando il ruolo della scrittura come mezzo tecnico di trasmissione, l'articolo mostra come la geometria si costituisca come impresa collettiva e diacronica, irriducibile al lavoro di singoli individui o persino di singole generazioni. La scrittura consente la sedimentazione e la riattivazione del senso, garantendo la continuità del sapere geometrico nel tempo e fondando la “comunità dei geometri” in un compito transgenerazionale. Il confronto con le teorie enattiviste mette in luce come la produzione di senso si svolga non solo sincronicamente, attraverso l'interazione nel presente, ma anche diacronicamente, tramite contributi distribuiti e cumulativi nel corso del tempo. Le interruzioni e le riparazioni nella coordinazione, sia nelle teorie enattiviste sia nell'analisi husserliana della pratica scientifica, non appaiono come fallimenti ma come condizioni necessarie per il continuo rinnovamento del senso condiviso. Collegando prospettive fenomenologiche ed enattiviste, il saggio sostiene che la costituzione comunitaria della scienza si comprenda al meglio come un processo di perdita e recupero della coordinazione, il cui medium è la scrittura e il cui esito è la continuità ininterrotta del sapere.

PAROLE CHIAVE: Storicità, Enattivismo, Participatory Sense-Making, Scrittura, Geometria.

Exploring *The Origin of Geometry* Through an Enactivist Lens: An Inquiry into Diachronic Group Formation and Collaborative Dynamics in Real-Time and Phase-Delayed Interactions

This essay investigates Edmund Husserl's *Origin of Geometry* through the lens of enactivism, with a particular focus on the theory of participatory sense-making. By emphasizing the role of writing as a technical medium of transmission, the paper shows how geometry constitutes itself as a collective and diachronic enterprise, irreducible to the work of single individuals or even single generations. Writing enables the sedimentation and reactivation of meaning, ensuring the continuity of geometrical knowledge across time and grounding the “community of geometers” in a transgenerational task. The comparison with enactivist theories highlights how sense-making unfolds not only synchronically, through in-

teraction in the present, but also diachronically, through distributed and cumulative contributions over time. Breakdowns and repairs in coordination, both in enactivist accounts and in Husserl's analysis of scientific practice, appear not as failures but as necessary conditions for the ongoing renewal of shared meaning. By bridging phenomenological and enactivist perspectives, the essay argues that the communal constitution of science is best understood as a process of loss and regain of coordination, whose medium is writing, and whose outcome is the uninterrupted continuity of knowledge.

KEYWORDS: Historicity, Enactivism, Participatory Sense-Making, Writing, Geometry.

Andrea Colombo

Morphogenesis without Structure?

Deleuze and René Thom

1. Introduction

The concept of morphogenesis occupies a strategic position in the encounter between philosophy and the sciences of form. Throughout the twentieth century, it has functioned as a privileged operator for thinking the emergence, transformation, and stability of forms across heterogeneous domains, from physics and biology to linguistics and the human sciences. Among the most ambitious attempts to formalize morphogenesis in rigorous terms stands René Thom's theory of catastrophes, which proposes a qualitative, topological framework capable of describing discontinuous transformations within structurally stable systems. Gilles Deleuze, who repeatedly refers to Thom's work — most notably in *The Fold* (1988) — does not merely appropriate this framework, nor does he simply transpose it into philosophy. Rather, Deleuze pushes Thom's morphogenetic thought to a critical threshold, beyond which the very notion of structure that underpins catastrophe theory becomes untenable.

This article argues that Deleuze's engagement with Thom should not be understood as a philosophical application of catastrophe theory, nor as an endorsement of its structural assumptions. On the contrary, Thom represents for Deleuze the most rigorous and systematic attempt to think morphogenesis within a structural paradigm. By taking this paradigm to its limit, Deleuze reveals the point at which morphogenesis can no longer be subordinated to structural stability, topological invariance, or classificatory closure. What emerges from this displacement is a conception of morphogenesis without structure: a process governed not by stable forms or archetypal transitions, but by intensive variation, fluctuation, and continuous differentiation. It is precisely at this point that the passage from

science to philosophy takes place in Deleuze's work. The displacement of morphogenesis beyond structure does not signal a refinement or extension of mathematical models, but a change of theoretical register: from scientific description to philosophical conceptualization. For this reason, we do not claim that Deleuze operates as a mathematician, nor that his thought aims at producing mathematical knowledge¹. On the contrary, mathematics functions here as a limit-case whose internal rigor allows philosophy to identify the point at which scientific explanation necessarily gives way to a different mode of thought.

Catastrophe theory, as developed by René Thom, is programmatically situated at the level of topology, insofar as it seeks to describe the qualitative organization of forms and the structural conditions of their discontinuous transformations rather than to provide a quantitative measurement of change (Papadopoulos 2024, p. 400). This orientation does not entail a rejection of mathematical analysis. On the contrary, catastrophe theory makes systematic use of differentiable potential functions and of the theory of critical points, but it subordinates these analytical tools to a classificatory project grounded in topological invariants and criteria of structural stability (Thom 1983, p. 77; Aubin 2004, p. 98). Within this framework, catastrophes are defined as sudden qualitative transitions that occur when a continuous variation of control parameters modifies the stability regime of a system. The domain of applicability of the theory is deliberately restricted to systems that can be described by a small number of control parameters and that satisfy conditions of topological equivalence. This restriction is not accidental but constitutive of Thom's project: only under such constraints is it possible to obtain a finite classification of elementary forms of discontinuity. The well-known list of seven elementary catastrophes does not function as an empirical taxonomy, but rather as a set of structural archetypes expressing the fundamental ways in which a form can lose or acquire stability (Thom 1983, p. 88).

Because catastrophe theory is oriented toward topology, it privileges invariant structural relations over metric determinations. Quantitative magnitudes such as distance, scale, or velocity are not denied, but are treated as secondary with respect to the qualitative organization of form and therefore as irrelevant for the purposes of topological classification. In this sense, catastrophe theory operates like a map that identifies critical regions, bifurcations, and thresholds without aiming to measure their quantitative extent. Morphogenesis, accordingly, is conceived as inseparable from structure: it unfolds within a space of possibilities defined by regimes of stability and instability, where form emerges through the

¹ For a detailed discussion of Deleuze's relation to mathematics and of the philosophical status of mathematical concepts in his work, see Colombo (2023) and Colombo (2025).

interplay between continuous variation and qualitative transformation, rather than being simply imposed in advance as a fixed schema.

It is precisely this structural character of Thom's morphogenesis that allows Deleuze to engage with catastrophe theory in a decisive way. In *The Fold*, Deleuze explicitly acknowledges his debt to Thom, noting that the very concept of the fold derives from catastrophe theory and corresponds to one of its elementary forms (Deleuze 1993, p. 16). The fold, in Thom's sense, describes the simplest possible catastrophe: a system governed by a single variable and a single control parameter, whose potential exhibits a minimum that disappears at a critical threshold, giving rise to instability. Yet Deleuze is fully aware that, within catastrophe theory, the fold is neither genetically primary nor universally generative. It is not the foundation from which other catastrophes can be derived, but merely one archetype among others, applicable only to specific kinds of systems.

Deleuze's philosophical operation begins precisely at this point. Rather than treating the fold as a structural model, he transforms it into a *conceptual operator*. In doing so, he detaches the fold from the regime of structural stability that governs Thom's theory. This detachment does not consist in rejecting the mathematical framework outright, but in subjecting it to a radical deformation. Deleuze introduces into the fold a series of notions that are formally illegitimate from a topological standpoint: fluctuation, infinite speed, vortex, turbulence. These notions do not extend catastrophe theory; they violate its conditions of possibility.

Everything changes when nucleation is made to intervene in place of internal homothesis. It is no longer possible to determine an angular point between two others, no matter how close one is to the other; but there remains the latitude to always add a detour, by making each interval the site of a new folding. That is how we go from fold to fold and not from point to point, and how every contour is blurred in order to give definition to the formal powers of the raw material, which rise to the surface and are put forward as so many detours and supplementary folds. The transformation of inflection can no longer allow for either symmetry or a favored plane of projection. It becomes vortical and is produced later—deferred, rather than prolonged or proliferating. The line effectively folds into a spiral in order to defer inflection in a movement suspended between sky and earth, which either moves away from or indefinitely approaches the center of a curve and at each instant “rises skyward or risks falling upon us.” But the vertical spiral neither retains nor defers inflection without also promoting it and making it irresistible in a transversal sense: a turbulence that is never produced on its own, whose spiral follows a fractal mode by which new turbulences are inserted between the initial ones (Deleuze 1993, p 17).

When Deleuze describes the transformation of the point of inflection through fluctuation rather than internal homothety, he abandons the idea that morphogenesis proceeds from point to point within a stable configuration space. Instead, morphogenesis unfolds “from fold to fold,” through an incessant multiplication of deviations that dissolve contours and undermine any privileged plane of projection. The fold no longer marks a determinate transition between stable states; it becomes the site of a vortical movement, a spiral that indefinitely approaches and withdraws from a center of curvature without ever stabilizing. Morphogenesis, in this sense, is no longer governed by archetypal forms, but by an intensive dynamic that exceeds structural classification.

This transformation marks a decisive boundary between mathematics and philosophy. By introducing parameters such as infinite velocity and fluctuation, Deleuze does not attempt to refine topological models; he displaces the problem onto a different plane (Tarizzo 2004, p. XVI). The issue is no longer how forms change within a structured space, but how form itself emerges from a pre-structural field of intensive variation. Thom’s catastrophe theory provides Deleuze with a rigorous image of morphogenesis at the moment when structure still holds. Philosophy begins where this image breaks down.

In this respect, Deleuze’s engagement with Thom anticipates the distinction between concepts and functions that will later be articulated in *What Is Philosophy?* (Deleuze, Guattari 1994). Scientific functions, including mathematical models, operate by slowing down chaos, extracting invariants, and stabilizing relations. Philosophical concepts, by contrast, must be capable of sustaining the chaotic, fluctuating, and intensive dimensions of reality without reducing them to structure. Deleuze’s fold is not a mathematical object, but a philosophical concept that emerges from the collapse of morphogenesis as a structural problem.

The question that guides this article—whether morphogenesis can be thought without structure—thus receives a precise answer. Deleuze does not oppose morphogenesis to structure in a simple or negative sense. Rather, he subtracts morphogenesis from structure by pushing structural morphogenesis to its breaking point. René Thom’s catastrophe theory marks the last mathematically rigorous attempt to think the genesis of form within a stable topological framework. Deleuze inherits this attempt, radicalizes it, and transforms it into a philosophy of morphogenesis without structure.

2. René Thom and Structural Morphogenesis

René Thom’s theory of catastrophes must be situated within a precise intellectual horizon, one that combines a rigorous mathematical formal-

sm with an explicitly philosophical ambition. Far from conceiving catastrophe theory as a predictive or universal model, Thom understood it as an attempt to restore intelligibility to natural phenomena by identifying the qualitative structures governing the emergence and transformation of forms. As Athanase Papadopoulos has emphasized, Thom's project is inseparable from a self-conscious return to Aristotle and to a *philosophy of nature* grounded in form, stability, and qualitative differentiation rather than quantitative calculation (Papadopoulos 2024, p. 403).

At its core, catastrophe theory proposes a qualitative description of dynamical systems whose behavior is governed by a potential function. Stable and unstable states correspond to critical points of this potential, and a catastrophe occurs when a continuous variation of control parameters produces a sudden qualitative reorganization of the system. The originality of Thom's approach lies not in the introduction of discontinuity as such, but in its strict formalization under conditions of topological equivalence and structural stability. Only those singularities that remain invariant under small perturbations are considered morphogenetically relevant. As a result, catastrophe theory yields a finite classification of elementary catastrophes—seven in its canonical formulation—each corresponding to a structurally stable mode of qualitative transition.

This finitude is not an accidental feature of the theory, nor a provisional limitation to be overcome by future refinements. On the contrary, it expresses Thom's fundamental conviction that morphogenesis can only be thought rigorously within a bounded space of possibilities (Rossi 2011, p. 98). Beyond a certain threshold of complexity, singularities proliferate without order, classification collapses, and the very notion of form loses its explanatory power. Thom is explicit on this point: catastrophe theory does not aspire to explain all processes, but only those that can be captured within a stable topological framework (Bruter 1978, p. 302). In this sense, the theory is deliberately non-universal, and its epistemological sobriety is one of its defining virtues.

The topological nature of catastrophe theory is essential to this stance. Topology abstracts from metric properties such as distance, magnitude, or velocity, focusing instead on relational invariants preserved through continuous deformation. A topological space may be described in multiple dimensions, but these dimensions are not measured; they are articulated. Morphogenesis, within this framework, is not a matter of quantitative growth or accumulation, but of qualitative reorganization. Catastrophe theory thus resembles a map without scale (Thom 1983, p. 129): it identifies critical zones, bifurcation points, and regions of stability, without assigning numerical values to their extent or intensity. Its descriptive power lies in the articulation of form, not in calculation. From this perspective, morphogenesis remains inseparable from struc-

ture. Each elementary catastrophe defines a specific structural configuration governing the possible transitions of a system. The persistence of structure at this level is not a theoretical weakness, nor a residue of an outdated paradigm, but a deliberate and constitutive feature of Thom's project. As David Aubin has shown, catastrophe theory does not represent a departure from structuralism, but rather its radicalization: structural explanation is extended to morphogenetic processes themselves, such that qualitative change becomes intelligible only insofar as it is constrained by invariant relations, conditions of structural stability, and a finite space of possibilities (Aubin 2004, p. 117). Thom's emphasis on topological invariance and classification is not meant to suppress dynamism, but to render it intelligible, by ensuring that morphogenetic transformations remain identifiable despite perturbations. Even when Thom insists on the dynamical character of form, this dynamism unfolds within a space that is already structured, partitioned, and classified. Structural stability guarantees that change occurs as variation internal to a stable formal schema, rather than as an unconstrained genesis of form. Morphogenesis, in Thom's sense, is therefore not opposed to structure, but *conditioned* by it.

This point has been emphasized by several commentators, who have shown that Thom's theory must be understood as a structural morphodynamics rather than as a philosophy of pure becoming (Petitot 2011, p. 273; Sarti, Citti, Piotrowski 2022, p. 22). What is at stake is not the dissolution of form into process, but the articulation of process through stable topological schemas. It is precisely along these lines that Jean Petitot develops his own project. Drawing explicitly on Thom's catastrophe theory, Petitot elaborates a structural dynamic capable of extending morphogenetic explanation beyond its original mathematical domain, applying it to perception, language, semiotics, and cognition (Petitot 1985, 2003, 2010). In Petitot's work, meaning itself becomes a morphogenetic phenomenon, emerging through bifurcations, attractors, and qualitative discontinuities within a structured space of possibilities. Yet this extension does not abandon structure; on the contrary, it radicalizes its role. Morphogenesis always presupposes a structural space articulated by differences, positional relations, and constraints of stability. Even when applied to domains traditionally considered resistant to formalization, catastrophe theory functions as a *transcendental framework of intelligibility* rather than as a mere descriptive metaphor. Taken together, Thom and Petitot thus delineate the upper limit of a structural conception of morphogenesis. Thom establishes its mathematical foundations and epistemological constraints; Petitot demonstrates its extraordinary power of extension across heterogeneous domains. Yet precisely through this extension, the limits of the paradigm become visible. Structural morphogenesis can account for the

transformation of forms within a given space of possibilities, but it cannot account for the genesis of that space itself. The morphogenetic field within which forms emerge remains given, not generated. Thom's morphogenesis is therefore a morphogenesis of form, not a genesis of structure.

It is at this limit that Deleuze intervenes. His engagement with Thom does not consist in rejecting catastrophe theory for remaining structuralist, nor in simply applying it within a philosophical framework. On the contrary, Deleuze takes Thom's structuralism with full seriousness, and seizes upon the point at which its explanatory power reaches its internal limit. The fold, detached from the conditions of structural stability that govern it in Thom's theory, becomes the site of a different kind of genesis—one no longer regulated by invariant structures, but by intensive variation, continuous differentiation, and the production of a morphogenetic field irreducible to structural classification.

3. Deleuze and Thom: The Fold as a Limit-Concept

The theoretical transformation that characterizes Gilles Deleuze's work from the mid-1970s onward cannot be adequately understood as a simple abandonment of structuralism in favor of a philosophy of becoming (Tarizzo 2003; Dosse 2012). Rather, it involves a more complex displacement of the transcendental itself. What is progressively called into question is not only the primacy of structure as an explanatory framework, but the very idea that the genesis of the real can be accounted for through a stable set of formal conditions. This displacement finds an initial articulation in *A Thousand Plateaus*, where the critique of structure is carried out through concepts such as multiplicity, assemblage, and deterritorialization. It is further developed in the cinema books, where Deleuze explicitly ties thought to non-totalizable temporal and perceptual processes. Yet it is only in *The Fold: Leibniz and the Baroque* (1988) that this transformation assumes a fully explicit and systematic philosophical form.

The Fold should therefore be read as a work of theoretical consolidation rather than as a transitional or purely exegetical text. Under the guise of a study devoted to Leibniz and the Baroque, Deleuze undertakes a profound reconfiguration of the transcendental, one that decisively separates his later philosophy from both structuralism and the earlier formulations of his own work (D'Aurizio 2024). What is at stake in this reconfiguration is the status of what Deleuze calls the "Outside" of thought. In *The Fold*, the Outside is no longer conceived as a limit opposed to interiority, nor as a domain that must be symbolically mediated through structure. Instead, it becomes the condition through which thought is

forced to operate, precisely insofar as thought can no longer rely on any pre-given unifying framework.

The concept of the fold articulates this new configuration. The fold names the dynamic through which the Outside is interiorized without being neutralized, and through which interiority is opened without being dissolved. It thus describes a movement of reciprocal implication between inside and outside that excludes any hierarchical or foundational ordering. Neither term precedes the other; neither functions as an origin. This movement is not merely metaphorical. It designates a real ontological process and, at the same time, the specific activity of philosophy, understood as the construction of concepts capable of sustaining difference without subordinating it to unity.

In this sense, *The Fold* marks a decisive shift in Deleuze's understanding of the transcendental. The transcendental is no longer identified with a set of formal structures underlying experience, but with a field of problematization inseparable from the concrete processes through which reality differentiates itself. The traditional distinction between transcendental conditions and empirical actuality is thereby displaced. Transcendental analysis becomes immanent to the dynamics it seeks to think. This shift entails the definitive abandonment of any residual structuralism, as well as the rejection of the idea that language or sense might provide a univocal horizon capable of organizing the real, as was still the case in the 1960s.

However, the Outside does not operate in abstraction. Deleuze insists that it requires a point of encounter, a force capable of receiving and actualizing it. This is the context in which the notion of the "soul" appears. Far from reintroducing a metaphysical or psychological substance, the soul designates a site of intensity, a capacity to be affected and to actualize virtual multiplicities. It must be carefully distinguished from consciousness, which presupposes identity, negation, and representation—categories that Deleuze had consistently criticized since the 1960s. Nor can the soul be equated with subjectivity or will, both of which imply a stable center of decision. Rather, the soul corresponds to the intensive multidimensionality of singularities. Singularities are defined not by what they are, but by what they can do: by the degrees of freedom that characterize a virtual field at a given moment. Their "choice" is not deliberative but performative; it consists in the orientation of lines of actualization. In *The Fold*, the transcendental—understood as the *virtual*—thus becomes inseparable from practical processes of actualization. Philosophy itself is transformed accordingly. Its task is no longer to ground structures or to secure conditions of possibility, but to accompany and articulate the processes through which singular configurations emerge.

Folds are in the soul, and they authentically exist only in the soul. This is already true of “innate ideas”: they are pure virtualities, pure powers whose act consists in habitus or arrangements—folds—in the soul, and whose completed act consists in an inner action of the soul, an internal deployment. But this is no less true of the world: the entire world is only a virtuality that currently exists solely in the folds of the soul that convey it, the soul implementing inner pleats through which it endows itself with a representation of the enclosed world. We thus move from inflection to inclusion in a subject, as if from the virtual to the real—inflection defining the fold, but inclusion defining the soul or the subject, that is, what envelops the fold, its final cause, and its completed act (Deleuze 1993, p. 23).

This transformation is inseparable from Deleuze’s engagement with Leibniz, who functions in *The Fold* as a conceptual threshold. Leibniz allows Deleuze to distance himself not only from Kantian transcendentalism and Hegelian dialectics, but also from the structuralist framework that had previously informed his own work. Through Leibniz, Deleuze shifts from a philosophy centered on subjectivity to one focused on processes of subjectivation, and from an ontology of essence to an ontology of events. In doing so, he opens onto what can be described as a *metaphysics of chaos* (Movahedi 2025).

Chaos, in this context, must not be understood as disorder or indeterminacy. It designates the absence of principles: the impossibility of grounding reality in any ultimate rule or foundation. This absence does not lead to nihilism. On the contrary, it constitutes the condition of creation. Because chaos has no rules, it cannot impose a rule; because it has no essence, it cannot be exhausted by any determination. Deleuze refers to this configuration as “chaosmos” (Deleuze 1993, p. 81), a term that captures the inseparability of chaos and the local consistencies that emerge within it. Singularities arise within chaosmos as local decelerations of infinite speed: provisional stabilizations that never harden into structures.

It is against this background that Deleuze’s encounter with René Thom must be situated. Deleuze explicitly acknowledges that the concept of the fold is inherited from catastrophe theory, where it designates the simplest elementary catastrophe. In Thom’s work, the fold models a qualitative transition within a structured space governed by a potential function and a control parameter. It is an archetype of structural morphogenesis, subject to the conditions of topological stability and invariance.

Deleuze does not deny this lineage. Yet the philosophical use he makes of the fold fundamentally alters its status. Rather than treating it as a structurally stable form, Deleuze subjects the fold to fluctuation, infinite speed, and turbulence. The point of inflection ceases to function as a stable topological feature and becomes the site of a continuous spira-

ling movement, one that indefinitely approaches and withdraws from a center of curvature. From the standpoint of topology, such an operation is illegitimate, since velocity and fluctuation cannot be integrated into a discipline defined by invariants. But this illegitimacy is not a defect; it is the very condition of Deleuze's philosophical gesture.

Deleuze does not attempt to extend catastrophe theory beyond its formal limits. Instead, he forces it to reveal the point at which it can no longer account for the genesis of form. By injecting infinite speed and fluctuation into the fold, Deleuze transforms it into a limit-concept. The fold no longer functions as a model of structured transition, but as the site where structural morphogenesis collapses and gives way to a conception of genesis grounded in intensive variation.

This transformation anticipates the distinction between science and philosophy that will later be articulated explicitly. Scientific models, including mathematical ones, operate by slowing down chaos, stabilizing relations, and extracting invariants. Philosophy, by contrast, must be capable of sustaining the intensive dimension of chaosmos without reducing it to structure. The fold, as Deleuze reconfigures it, belongs to this philosophical register. It becomes the operator through which morphogenesis can be thought without structure.

4. Conclusions: Beyond a Philosophy of Mathematics

The analysis developed throughout this article allows us to clarify a point that is often obscured in the secondary literature on Deleuze: despite the central and systematic presence of mathematical references in his work, Deleuze never aims to construct a philosophy of mathematics. This claim may appear counterintuitive, given the density of mathematical figures that traverse his writings—from differential calculus and Riemannian manifolds to catastrophe theory and topology—but it becomes unavoidable once the internal logic of his project is properly reconstructed.

At no stage does Deleuze attempt to provide a foundational account of mathematics, to determine its epistemological legitimacy, or to articulate its internal norms of validity. Nor does he seek to interpret mathematics as a privileged access to truth or as a meta-language capable of grounding philosophical discourse. Even when mathematics appears to play a decisive role, it does so neither as an object of philosophical reflection nor as a model to be imitated. Rather, mathematics functions as one domain among others—alongside art, science, and politics—through which the real expresses its problematic structure.

This point becomes particularly clear in Deleuze's engagement with René Thom. Thom's catastrophe theory provides Deleuze with a rigorously elabo-

rated morphogenetic framework, grounded in topology and defined by the principles of structural stability, classification, and invariance. Deleuze does not contest the internal coherence of this framework, nor does he attempt to extend it philosophically. On the contrary, he takes Thom's theory as a limit-case: the most advanced attempt to think morphogenesis within a structural regime. What interests Deleuze is not the mathematical validity of catastrophe theory, but the point at which its explanatory power reaches its limit—namely, where morphogenesis can no longer be contained within stable forms.

The concept of the fold, inherited from Thom, marks precisely this threshold. In Deleuze's hands, the fold ceases to function as a structurally stable catastrophe and becomes instead a philosophical operator: a way of thinking continuous variation, fluctuation, and inflection beyond any classificatory schema. The introduction of infinite speed, turbulence, and vortex-like dynamics explicitly violates the conditions of topological reasoning. Yet this violation is not accidental. It signals a change of register. Deleuze is no longer operating within mathematics, nor even alongside it, but extracting from it a conceptual tension that mathematics itself cannot resolve without ceasing to be mathematics.

This extraction should not be misunderstood as a metaphorical appropriation. Deleuze does not aestheticize mathematics, nor does he dissolve its rigor into poetic imagery. Rather, he treats mathematical structures as real processes whose philosophical significance lies not in their formal properties, but in their capacity to reveal the limits of structural explanation. Mathematics, in this sense, belongs fully to the real: it is one of the ways in which the real organizes, stabilizes, and slows down chaos. But precisely for this reason, it cannot think the virtual as such.

This is the decisive asymmetry that emerges most clearly in *What Is Philosophy?*. There, Deleuze and Guattari draw a sharp distinction between philosophy, science, and art, not as separate domains of knowledge, but as distinct modes of engagement with chaos. Science—including mathematics—constructs functions and models that actualize the virtual by imposing reference and slowing down infinite speed. Philosophy, by contrast, does not model or refer. It creates concepts that give consistency to chaos without neutralizing it. The philosophical concept does not explain the real; it intervenes within it, reconfiguring its problematic field. See from this perspective, the extensive use of mathematical notions in Deleuze's work does not indicate an ambition to mathematize philosophy. On the contrary, it reflects a sustained effort to prevent philosophy from collapsing into either scientific formalism or linguistic idealism. Mathematics provides Deleuze with exemplary cases of problem-structures, singularities, and non-totalizable fields—but philosophy alone is capable of virtualizing these structures, that is, of extracting their problematic power and extending it beyond the domain in which they were originally constituted.

This is why the recurrent temptation to read Deleuze as proposing a “philosophy of mathematics” ultimately misconstrues his project (Ardoline 2024). Such a reading risks attributing to Deleuze a foundational or epistemological concern that he consistently avoids. It also risks flattening the crucial distinction between concepts and functions, between the plane of immanence and the plane of reference. Deleuze’s engagement with mathematics is neither external nor internal; it is transversal. Mathematics is not subordinated to philosophy, but neither does philosophy derive its legitimacy from mathematics.

The same conclusion applies to the broader question of morphogenesis. Deleuze does not seek to replace mathematical models of morphogenesis with philosophical ones. Instead, he shows that any structural theory of form, however sophisticated, encounters a limit when confronted with intensive variation and singular becoming. Philosophy intervenes precisely at this limit—not to correct science, but to think what science must necessarily leave unthought: the virtual consistency of the real. In this sense, Deleuze’s philosophy is not a philosophy of mathematics, but a philosophy through mathematics, in the strongest possible sense. Mathematics is one of the sites where the real articulates its differential structure, and philosophy is the practice that renders this articulation thinkable without reducing it to structure, function, or model. What Deleuze ultimately defends is not the mathematical nature of philosophy, but the philosophical necessity of thinking beyond mathematics—without ever dismissing its reality.

This conclusion allows us to restate the central thesis of the article in a precise way: Deleuze’s engagement with mathematics, and with Thom in particular, does not aim at grounding philosophy in formal structures, but at demonstrating that morphogenesis, if taken seriously, leads beyond structure. Philosophy does not explain this movement; it accompanies it, conceptualizes it, and pushes it further. That is why Deleuze never constructs a philosophy of mathematics—and why his thought remains irreducible both to scientific modeling and to speculative abstraction.

Bibliography

- Ardoline, M. J.
2024 *Deleuze, Mathematics, Metaphysics. Difference and Necessity*, Edinburgh University Press, Edinburgh.
- Aubin, D.
2004 *Forms of explanation in the catastrophe theory of René Thom: topology, morphogenesis, and structuralism*, in “Growing Explanations: Historical Perspectives on Recent Science”, ed. By M. Norton Wise, Duke University Press, pp. 95-130.

- Borum, P.
2017 *The Notion of "Singularity" in the Work of Gilles Deleuze*, in "Deleuze Studies", 11/1, pp. 95-120.
- Bruter, C. P.
1978 *The Theory of Catastrophes: Some Epistemological Aspects*, in "Synthese", 30/2, pp. 293-315.
- Colombo, A.
2023 *Immanenza e molteplicità. Gilles Deleuze e le matematiche del Novecento*, Mimesis, Milano-Udine.
- 2025 *What Becomes of Mathematics in Deleuze's Philosophy?*, in "Nóema", 16, pp. 106-124.
- D'Aurizio, C.
2024 *Una filosofia della piega. Saggio su Deleuze*, Mimesis, Milano-Udine.
- Del Fabbro, O., Weaver, S.
2025 *Form, Individuation and Catastrophe: The Parallels of Gilbert Simondon and René Thom*, in "Perspectives on Science", 33/6, pp. 796-818.
- Deleuze, G.
1993 *The Fold. Leibniz and the Baroque*, The Athlone Press, London.
- Deleuze, G., Guattari, F.
1994 *What is Philosophy?*, Columbia University Press, New York.
- Dosse, F.
2012 *Deleuze and structuralism*, in "The Cambridge Companion to Deleuze", ed by D.W. Smith, H. Somers-Hall, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 126-150.
- Movahedi, H.
2025 *Continuity and Event in Leibniz and Deleuze. Poetics of the Fold*, Edinburgh University Press, Edinburgh.
- Papadopoulos, A.
2024 *René Thom: From Mathematics to Philosophy*, in "Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice", ed. by B. Sriraman, Springer, pp. 385-429.
- Petitot, J.
1985 *Les Catastrophes de la Parole: de Roman Jakobson à René Thom*, Maloine, Paris.
- 2003 *Morphogenesis of Meaning*, Peter Lang, Bern.
- 2010 *The Morphogenetic Models of René Thom*, in "Morphogenesis. Origins of Patterns and Shapes", ed. by P. Bourguin, A. Lesne, Springer, Berlin, pp. 273-281.
- 2011 *Cognitive Morphodynamics: Dynamical Morphological Models of Constituency in Perception and Syntax*, Peter Lang.
- Rossi, A.
2011 *René Thom: forms, catastrophes and complexity*, in "Logic and Philosophy of Science", IX/1, pp. 95-101.
- Sarti, A., Citti, G.
2020 *A Fistful of Differentials*, in "La Deleuziana", 11, pp. 4-18.
- Sarti, A., Citti, G., Piotrowski, D.
2022 *Differential Heterogenesis. Mutant Forms, Sensitive Bodies*, Springer.

Tarizzo, D.

2003 *Il pensiero libero. La filosofia francese dopo lo strutturalismo*, Raffaello Cortina, Milano.

2004 *La metafisica del caos*, in G. Deleuze, "La piega. Leibniz e il Barocco", Einaudi, Torino, pp. VII-XLI.

Thom, R.

1983 *Mathematical Models of Morphogenesis*, Ellis Horwood Publisher.

Una morfogenesi senza struttura? Deleuze e René Thom

L'articolo analizza il rapporto tra Gilles Deleuze e la teoria delle catastrofi di René Thom al fine di chiarire lo statuto filosofico della nozione di morfogenesi nel pensiero deleuziano. Muovendo da una ricostruzione della morfogenesi strutturale elaborata da Thom e sviluppata da Jean Petitot, si mostra come tale paradigma rimanga vincolato ai criteri di stabilità, invarianza topologica e classificazione formale. Attraverso un'analisi approfondita di *La piega. Leibniz e il barocco*, l'articolo sostiene che Deleuze non prosegue né filosoficamente né epistemologicamente il progetto matematico di Thom, ma lo conduca deliberatamente al proprio limite. È in questo gesto che emerge una concezione di morfogenesi senza struttura, fondata su variazione intensiva, fluttuazione e differenziazione continua. Si argomenta infine che tale passaggio segna, in Deleuze, il confine tra scienza e filosofia: lungi dal proporre una filosofia della matematica, Deleuze utilizza la matematica come caso-limite per pensare ciò che eccede ogni modello strutturale, riaffermando la funzione propriamente filosofica della creazione concettuale.

PAROLE CHIAVE: Deleuze, René Thom, Morfogenesi, Struttura, Filosofia e matematica.

Morphogenesis without Structure? Deleuze and René Thom

This article examines the relationship between Gilles Deleuze and René Thom's catastrophe theory in order to clarify the philosophical status of morphogenesis in Deleuze's thought. Starting from a reconstruction of structural morphogenesis as developed by Thom and extended by Jean Petitot, the article shows how this paradigm remains grounded in structural stability, topological invariance, and formal classification. Through a detailed analysis of *The Fold: Leibniz and the Baroque*, it argues that Deleuze neither philosophically nor epistemologically continues Thom's mathematical project, but deliberately pushes it to its limit. At this threshold, a conception of morphogenesis without structure emerges, grounded in intensive variation, fluctuation, and continuous differentiation. The article concludes by showing that this displacement marks, in Deleuze's work, the transition from science to philosophy: rather than proposing a philosophy of mathematics, Deleuze mobilizes mathematics as a limit-case in order to think what necessarily exceeds structural explanation, thereby reaffirming the philosophical task of concept creation.

KEYWORDS: Deleuze, René Thom, Morphogenesis, Structure, Philosophy and Mathematics.

Charles Alunni, Francesco La Mantia, Fernando Zalamea
**Dynamic Platonism: Mathematics, Gesture, and
Philosophy¹**

Dynamic Platonism: An Introduction

This paper introduces and develops the concept of Dynamic Platonism as a novel philosophical framework for understanding the ontology and practice of mathematics.

Unlike traditional ontological Platonism, which posits the existence of eternal, unchanging Forms outside of space and time, Dynamic Platonism emphasizes the fluid, historically situated, and diagrammatically enacted nature of mathematical idealities. Drawing on the foundational insights of Lautman, Cavaillès, and subsequent models such as TSK (Topos of Sheaves over Kripke Models), the authors argue that mathematical objects are not static entities but are dynamically constituted through gestures, diagrams, and formal processes that evolve within specific contexts. This approach seeks to reconcile the apparent tension between invariance and change by conceptualizing mathematical truths as partial invariants – local stability points embedded within a flux of historical and embodied activity – thus challenging the classical notion of absolute, atemporal Forms. The opening part of the paper (Sections 1.1 and 1.2) explores the seemingly paradoxical phrase “Dynamic Platonism”, clarifying that it signals a shift away from static, transcendent notions of eternal ideas, toward an understanding of their productive, historically

¹ The content exposed in this article is the result of shared reflections developed by the authors through seminars, conferences, and private discussions. Nonetheless, Francesco La Mantia is the author of sections 0, 1.1, 1.2, 2.6 (including 2.6.1 through 2.6.5), and 4. Charles Alunni is responsible for sections 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, and 2.5. Fernando Zalamea authored sections 3.1, 3.2, and 3.3. For the sake of stylistic consistency, quotations have been provided in English, including those for which no official translation is available.

mediated, and relational character. This conceptual realignment builds on and reinterprets transcendental and dialectical strands in the philosophy of mathematics, portraying idealities not as fixed entities but as generative engines of mathematical development.

Section 1.2 serves as a transitional interlude, bridging the general theoretical framing with a more focused engagement with the philosophy of Albert Lautman, which becomes the core concern of the second major part of the paper (2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5). There, Lautman is positioned as a central figure whose dialectical metaphysics articulates the virtual and generative nature of mathematical idealities. His thought, rooted in a creative reinterpretation of Platonic dialectic and influenced by developments in physics and algebraic topology, conceives of mathematical objects as arising from structural tensions and symmetries—mediated by operators such as involution and relations of symmetry and asymmetry.

An extended interlude in Section 2.6 introduces the relevance of Dynamic Platonism in the context of so-called TSK models, thus preparing the conceptual ground for the third part of the paper. This segment (Sections 3.1–3.3) develops a formal articulation of Dynamic Platonism through these models, which integrate sheaf theory, modal and temporal logic, and higher-category structures to express the stratified, relational, and historically embedded dimensions of mathematical thought.

Finally, the concluding section (4.) synthesizes the findings and proposes Dynamic Platonism – particularly as instantiated through TSK models – as a shift in philosophical paradigm: from a static ontology of mathematical objects to a dynamic, context-sensitive, and evolving schema. This reconceptualization invites a rethinking of mathematical objectivity itself as emergent, relational, and historically situated – opening new directions for philosophical reflection and mathematical practice in dialogue with contemporary science.

1.1 Dynamic Platonism: A Mysterious Phrase?

“Dynamic Platonism” is an apparently mysterious phrase. In mathematics, a Platonist is someone who postulates that mathematical objects (roughly speaking, numbers and geometric figures) are abstract entities, idealities existing outside of space and time².

More generally, Platonism is traditionally characterized as the hypothesis that assumes the existence of non-temporal and non-spatial entities,

² See Øystein Linnebo “Platonism in the Philosophy of Mathematics”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2024 Edition) Edward N. Zalta & Uri Nodelman (eds.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/sum2024/entries/platonism-mathematics/>.

properties, or facts of some kind³. According to this perspective, Dynamic Platonism is nothing more than a self-contradictory monstrosity, or at most, a diversion for minds accustomed to the ephemeral pleasures of the oxymoron. To the extent that it refers to what changes over time⁴, “dynamic” is an adjective that poorly suits the a-temporal ontology of Platonism. Yet, upon closer and more thoughtful analysis, at least three considerations allow us to diminish the apparent self-contradictory scope of Dynamic Platonism. These are three observations that show how the portrait of the Platonist just outlined is actually a reductionist and partial caricature. To limit ourselves to the history of the philosophy of mathematics, we must note that:

1. The commitment to the abstract existence of mathematical entities does not exhaust the profile of mathematical Platonism. Alongside an ontological Platonism, there exist non-ontological varieties of Platonism that have to a varying extent detached the realm of mathematical objectivity from ontology⁵.

2. Thanks to the divergence between objectivity and ontology, there are those who have immersed mathematical Platonism in a transcendental perspective, more sensitive to the processes of autonomy constitution of mathematical idealities than to the discovery of their “pre-existing reality⁶”.

Before this immersion, known in the literature as “Transcendental Platonism⁷” or “Constituted Platonism⁸”, a tradition of studies originating from the research of Albert Lautman (1908-1944) and Jean Cavaillès (1903-1944) has emphasized the productive and inherently non-inert nature of mathematical idealities: mathematical beings are not “static beings⁹”, but rather generators of mathematical beings¹⁰, producers of idealities that develop within formal theories subject to the historical dialectic of change¹¹.

What we call “Dynamic Platonism” arises from the recognition of the productive and historically situated character of mathematical idealities. The paper that we propose here aims to clarify the theoretical conse-

³ See Peter Slowik *The Deep Metaphysics of Space*, Springer, Dordrecht 2016 p. 165.

⁴ See Peter Smith *Explaining Chaos*, Cambridge University Press, Cambridge, p. 37.

⁵ See Micheal Resnik *Frege and the Philosophy of Mathematics*, Cornell University Press, Ithaca & London, 1980, p. 162.

⁶ Jean Petitot “A Transcendental View on the Continuum: Woodin’s Conditional Platonism”, *Intellectica*, 15, 2009, p. 99.

⁷ Ivi.

⁸ Richard Tieszen *After Gödel*, Oxford University Press, Oxford, 2011, p. 102.

⁹ Albert Lautman *Les Idées, les mathématiques et le Réel physique*, Vrin, Paris, 2005, p. 223

¹⁰ Ibidem p. 226.

¹¹ Ivi.

quences of this particular way of understanding the status of mathematical objectivity. Sharing with Transcendental Platonism a pronounced focus on the constitution processes of mathematical idealities, Dynamic Platonism is a consistent form of Platonism (non-ontological) because it assigns to these idealities not only a historical dimension but also a structural invariance similar to the omni-temporality (Allzeitlichkeit) envisaged by Husserl¹² for the objects of logic and mathematics.

According to the father of contemporary phenomenology, these objects are ideal not because they are inscribed in an a-temporal hyper-uranium, but because they are invariant over time (or omni-temporal). For Dynamic Platonism, the omni-temporality of mathematical entities is always local, that is, subject to the formal constraints of historically determined contexts. For example, the theorem that the sum of the interior angles of any triangle is equal to 180° is a solid result of Euclidean geometry that has stood the test of time.

Outside of Euclidean geometry, however, this result no longer holds, showing how its own omni-temporality is relative or local (i.e., conditional on the axioms of Euclidean geometry). Dynamic Platonism is then characterized as a matrix of “partial invariances¹³”, as a generator of idealities sensitive to the history of formal contexts and the plasticity of gestures that modify those contexts in relation to other invariances ready to propagate over time or, if necessary, to give way to other idealities. Hence, in conclusion, the unfolding of a universe in motion, of a field of “quasi-objects¹⁴” that will be the main domain of inquiry in our article.

1.2 Dynamic Platonism: Moving Toward Albert Lautman

The conception of mathematical idealities as historically conditioned yet partially invariant structures, as advanced in the preceding section, forms the backbone of our formulation of a Dynamic Platonism. Rather than opposing the metaphysical to the historical or the ideal to the empirical, this view contends that ideal mathematical structures evolve within frameworks of intelligibility that themselves are subject to conceptual and scientific transformation. Yet, in adopting such a standpoint, we do not claim to be charting wholly new territory. On the contrary, the intui-

¹² See Edmund Husserl *Erfahrung und Urteil. Untersuchungen zur Genealogie der Logik*, Academia/Verlagsgesellschaft mbH, Berlin, 1939, pp. 309-3014.

¹³ Fernando Zalamea *Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics*, Urbanomic, Cambridge Massachusetts, pp. 345-346.

¹⁴ Alain Badiou *Cours Traité d'Ontologie Transitoire*, Les éditions du Seuil, Paris, 2005, p. 6.

tion that the mathematical ideality is not frozen but mobile, not static but relationally modulated across time and theory, finds an early and profound articulation in the work of Albert Lautman.

Lautman's philosophical program, particularly as elaborated in his *Essai sur l'unité des mathématiques* et divers écrits, stands as one of the most ambitious and conceptually rich attempts to render intelligible the interplay between the formal apparatus of mathematics and the metaphysical structures that govern their genesis. His vision, we argue, is best understood as a paradigmatic instantiation of Dynamic Platonism *avant la lettre* – a Platonism which neither denies the autonomy of ideal mathematical forms nor separates them from the dialectical processes that engender their manifestation in concrete mathematical theories.

What distinguishes Lautman's contribution, and justifies a pause to reassess his legacy, is precisely the way in which he reactivates Platonic metaphysics in light of contemporary developments in mathematics and physics, especially within the domains of algebraic topology, group theory, and differential geometry. Drawing on a select but crucial set of sources – among them Oskar Becker, Julius Stenzel, and Léon Robin – Lautman develops a reading of Plato that foregrounds dialectic not as a merely logical tool but as a generative process underpinning the emergence of mathematical structures. His selective yet incisive engagement with ancient sources, combined with a deep immersion in the technical currents of his time, allows him to bridge a disciplinary divide often thought unbridgeable: the historical-exegetical study of Platonic thought and the formal practice of modern mathematics.

Lautman's originality lies not only in his attempt to metaphysically justify the fecundity of mathematical invention but also in his articulation of a dialectical schema that mirrors the very operations of scientific thought. In this regard, his reflections anticipate key developments in contemporary philosophy of mathematics, including the categorical formalizations proposed by thinkers such as Lawvere¹⁵ and Zalamea, as well as broader epistemological reorientations that question the dichotomy between structure and genesis.

By positing that ideal mathematical entities arise from the tension between opposing conceptual tendencies – symmetry and asymmetry, continuity and discontinuity, algebra and geometry – Lautman sketches

¹⁵ See at least Francis William Lawvere & Stephen Schanuel *Conceptual Mathematics: a First Introduction on Categories*, Cambridge University Press, Cambridge ; Francis William Lawvere & Robert Rosebrugh *Sets for Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.

a metaphysics of the virtual, where mathematical truths are not given once and for all but continuously actualized through dialectical mediation. It is in this sense that his work constitutes not only a contribution to the philosophy of mathematics but a full-blown metaphysical system, one in which the ontological status of mathematics is rethought in dynamic, rather than static, terms.

Moreover, Lautman's vision operates reciprocally: just as metaphysical schemas illuminate the structure of mathematical theories, so too do mathematical developments retroact upon philosophical categories, transforming the very dialectic from which they emerge. This recursive relation, wherein philosophical thought is both foundational for and transformed by scientific insight, is perhaps Lautman's most enduring legacy. In foregrounding this dialectical entwinement, his work subverts the notion of philosophy as merely reflective or interpretive in relation to science. Instead, it becomes a participant in the very logic of discovery, an operator within the conceptual fabric of mathematical reason itself.

The next section thus turns to a detailed examination of Lautman's contribution, situating his Dynamic Platonism within the broader intellectual context of early 20th-century mathematics and its metaphysical interpretations. By retracing his engagement with both Platonic dialectic and contemporary scientific practice, we aim to clarify the extent to which his thought not only anticipates but crucially informs current debates about the nature of mathematical ideality and the philosophical stakes of its formalization.

2.1 Albert Lautman's Legacy

Albert Lautman's work is in our opinion the very first use of the notion of Dynamic Platonism (or rather of its conceptual equivalent), outside the specialized field of classical scholars, which is applied to mathematics and physics. Lautman's reference classical scholars, outside the case of Oskar Becker¹⁶, have limited their field of philosophical investigation to ancient mathematics. Only Lautman will consider the contemporary physico-mathematical world.

We will see among other things what the transversal development of his Platonism corresponds to the "renewal" in which he resolutely participates in metaphysics.

¹⁶ On this point, see the seminal work: Oskar Becker *Mathematische Existenz*, Berlin, De Gruyter, 2013 (1973). Note by Francesco La Mantia.

2.2 The Historical Context

Lautman mainly bases his argument on the work of Julius Stenzel, *Zahl und Gestalt bei Plato und Aristoteles*, Leipzig, 1924, Oskar Becker, “Die diairetische Erzeugung der platonischen Idealzahlen”, *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, B 1, 1931, pp. 464-501 and Léon Robin, *Platon*, Paris, 1935. It is in the conclusion of the *Essai sur l'unité des mathématiques* that Lautman reveals his sources:

We would like to show, before concluding, how this conception of an ideal reality, superior to mathematics and yet so ready to be embodied in their movement, comes to be integrated into the most authoritative interpretations of Platonism [...] All modern commentators of Plato have on the contrary insisted on the fact that the Ideas are not the immobile and irreducible essences of an intelligible world, but that they are linked to each other according to the schemes of a superior dialectic which presides over their coming. The works of L. Robin, Stenzel, Becker have in this respect brought considerable clarity on the dominant role of the Ideas-numbers regarding both the becoming of numbers and that of the Ideas¹⁷.

Who are these authors who bring a new vision of Platonic philosophy? Becker, Stenzel and Robin are just Lautman's contemporaries, and he needed an absolutely extraordinary philosophical flair to discover their “Dynamic Platonism” which will come to apply in the field of contemporary mathematics and physics.

2.3 Lautman and Plato

The simple survey of Lautmanian quotations allows any reader to take stock of a theory that is not only aware of the radical and irreversible revolution affecting Platonic studies (with Becker, Stenzel and Robin, and I would add what is for me the true founding article by Georges Rodier, “Les mathématiques et la dialectique dans le système de Platon”, *Archiv für Geschichte der Philosophie*, XV, 1902, pp. 479-490, reprinted in *Études de philosophie grecque*, Paris, 1926, pp. 37-48, an article that acknowledges the existence of a profound relationship between mathematics and dialectics in the philosopher), which definitively internalizes it in the philosophical and explanatory field of modern mathematics, but which, by this means, broadens its domain. This is the “feedback effect”

¹⁷ Albert Lautman, *Les mathématiques les idées et le réel physique*, Vrin, Paris. 2006, p. 230.

of Lautmanian theory on Platonic philosophy. It should be an object of study for any Platonic philosopher, or any specialist somewhat interested in the dialectical question in general.

Apart from his pertinent reflections on Lautmanian Dynamic Platonism, Emmanuel Barot's enterprise is also exemplary in its rapprochement with Hegelian dialectics¹⁸.

As part of a parallel work on Jean Cavaillès, one will also read with great interest the work of Baptiste Mèlès "Pratique mathématique et lectures de Hegel, de Jean Cavaillès à William Lawvere", *Philosophia Scientiae*, Editions Kime, 2012, *From Practice to Results in Logic and Mathematics*, 16 (1), pp.153-182. See <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01224100/document>

I will take as a representative sample of the *Philosophiques* issue, a quote from Fernando Zalamea that mathematically expands and specifies his earlier propositions put forward as early as 2006¹⁹:

In fact, at a difficult time, the young graduate of the École Normale Supérieure stood up against a "resignation" of philosophy at the expense of language, wished "a higher ambition for the philosophy of science", and imagined a program for understanding modern mathematics – non-analytical, discrete or static – open to a continuous and dynamic synthesis of knowledge (which explains his deep inclination towards a non-reified Platonism, open to movement, following Natorp and Robin). It is astonishing that the logic of sheaves shows – in agreement with the philosopher – that this continuous knowledge of the truth is possible. Thus, by reading Lautman, one comes to "listen to the voice of things" (Grothendieck) and to perceive some conceptual prefigurations which, later, will be translated technically into effective mathematics. According to a General Dialectic which takes into account an authentic pendulum oscillation, an analysis/synthesis of the concept of sheaf can be carried out along some Lautmanian lines.

To conclude on this point, I would add to what has been said that Lautman was rigorously engaged in a process of "desubstantialization" of mathematical philosophy, by a displacement and a complication of the metaphysically foundational relationship form/matter (another Platonic theme).

¹⁸ On this question, see his article in the journal *Philosophiques*, Volume 37, number 1, spring 2010: "Lautman's duality against Hegel's negativity, and the paradox of their formalizations. Contribution to an investigation into the formalizations of the dialectic", pp. 111-148.

¹⁹ For a critical analysis of Zalamea's undertaking concerning this mathematization – translating the dialectic of Lautmanian Ideas and Structure Schemas into the idiom of category theory – see David Corfield's article "Commentaire sur Emmanuel Barot : Lautman", from the journal *Philosophiques* already cited (p. 210).

2.4 Lautman between “Operators of Dialectical Interaction” and “Limits Symmetry”.

As an example, and among many others, still from the year 1937, Jacques Herbrand’s theorem on “fields” presents itself to Lautman as an almost pure case of solidarity between a set of formal operations defined by a system of axioms, and the existence of a domain where these operations are realizable. He notes in this regard:

It seems that a certain restriction still adheres to this logical schema; genesis only takes place in one direction, from operations to the domain. Now, if we can establish a rigorous appropriation between the domain and the operations definable on it, we can seek to determine both the operations from the domain and the domain from the operations [...]. Our intention being to show that the internal completion of a being is affirmed in its creative power, this conception should perhaps logically imply two reciprocal aspects: the essence of a form being realized within a matter that it would create, the essence of a matter giving birth to the forms that its structure draws [...] In fact, the schema of geneses that we are going to describe within more complicated theories abandons the overly simplistic idea of concrete domains and abstract operations that would possess in themselves a nature of matter or a nature of form. This conception would indeed tend to stabilize mathematical beings in certain immutable roles and would ignore the fact that abstract beings which are born from the structure of a more concrete domain can in turn serve as a basic domain for the genesis of other beings²⁰.

We will speak here of the result of a certain philosophical axiomatics and its self-application by “reflection”: what Lautman affirms of mathematical logic, of the theorems of existence in the theory of algebraic functions, or of the theory of the representation of groups as different domains of transcendental investigation, is “returned” by symmetry on the philosophical device itself, which, at first, finds itself situated in the position of operation – and vice versa. This is an extremely powerful operator of dialectical interaction which, from the domain of physics-mathematics, will induce effects in the philosophical field and activity.

The most impressive place where Lautman’s approach appears as almost “prophetic”, the domain of his greatest philosophical and intuitive inspiration, the dialectical coupling on which all the promises of his mathematical philosophy are polarized, seem without a doubt to touch on the problem of “symmetry and asymmetry in mathematics and physics”. This is the title of one of Lautman’s very last texts (1942), first printed as

²⁰ Albert Lautman, *Les Idées, les mathématiques et le Réel physique*, Vrin, Paris, 2005, pp. 186-187.

a separate issue in the “Actualités scientifiques et industrielles” in 1946, before joining other contributions in the project initiated in 1942 by François Le Lionnais, *Les Grands Courants de la pensée mathématique*, published in 1948 (reissued in 1998, *Les Grands Courants de la pensée mathématique*, Paris, Hermann).

I would add that this text could be emblematic of the gap between the Cavaillès and Lautman duo. If, as early as his thesis, Lautman had already shown his interest in mathematical physics – in particular through his attentive study of the texts of Élie Cartan (on the “generalization of the notion of space”, “absolute parallelism and unitary theory”) or those of Hermann Weyl (on “Riemannian spaces”), but also through his reading of Arthur Eddington’s work, *Espace, temps, gravitation*, or through that of *La Structure des nouvelles théories physiques* by Gustave Juvet – it was towards the end of his life, before falling in combat, that he oriented all his epistemological activity towards these questions of physics (and this, thanks to his exceptional mathematical background).

His very personal and extremely original contribution mainly concerns the questions of the envelopment of the notions of symmetry and asymmetry. He begins his thematic work with an analysis of Louis Pasteur’s pioneering work on cellular asymmetry by “enantiomorphy”, “at the origin of all the structural theories of contemporary stereochemistry”. Then he moves on to the founding work in physics of Pierre Curie:

[...] the mixture of symmetry and asymmetry becomes for him a necessary condition of the physical phenomenon in general [...]. To every physical phenomenon is linked the idea of a saturation of symmetry, of a maximum symmetry compatible with the existence of this phenomenon and which characterizes it. A phenomenon can only exist in a medium possessing its characteristic symmetry or a lesser symmetry. If therefore we call the absence of an element of symmetry an element of asymmetry, we can understand how Pierre Curie was able to write: “Certain elements of symmetry can coexist in certain phenomena, but they are not necessary. What is necessary is that certain elements of symmetry do not exist. It is the asymmetry which creates the phenomenon” (P. Curie, “On Dissymmetry in Physical Phenomena”, *Complete Works*, p. 126)²¹.

Lautman links this idea of “limit symmetry” to Plato’s *Timaeus*, and in particular to his theory of the receptacle conceived as a “place” that is the *Chora*. However, this is not a question here of a ceremonial reference (and this is Lautman’s prodigious speculative force):

²¹ Ibid. p. 266.

This reference to Plato allows us to understand that the materials of the Universe are not so much the atoms and molecules of physical theory as these great pairs of ideal opposites such as the Same and the Other, the Symmetrical and the Dissymmetrical, associated with each other according to the laws of a harmonious mixture [...]. Plato also suggests more [...]. The properties of place and matter are not purely sensible in his work; they are [...] the geometric and physical transposition of a dialectical theory. It could also be that the distinction between left and right, as observed in the sensible world, is only the transposition onto the plane of experience of an asymmetrical symmetry that also constitutes the abstract reality of mathematics²².

2.5 Operations of Involution

Here, at the height of his power of conviction, it is as if Lautman were making the gesture of his thought flash by a pivot at the very heart of the domain or field, both thematic and operational, of mathematical physics. It is here that it is illustrated as in the purity of a pure diagram of thought, where the virtual power of his schemes would come to be visualized in the eye of the mind that is both mathematician and philosopher. Thought grants itself something like its own “scopic” perception of itself. It is at the very moment when it concretely invests the physico-mathematical domain that the omnipotence of its dialectical device is marked. Philosophy comes here to reveal its habitation of/in science, thus revealing their double power of reciprocal suggestion: for here, Science thinks (and thinks of itself), as inhabited by its philosophical specters. It is in such a moment of suspense, in this “between two worlds” that the artificial objections raised against a supposed “arbitrariness” of his Dialectic come to be cancelled out. It is as if the dialectical operation were suddenly revealed, suddenly made readable to the eye of theory by its own “rise towards the absolute”, thus providing it with a sort of “universal covering surface”.

This feeling only becomes more acute as Lautman’s argument unfolds. In a final exemplary and insistent journey, Lautman brings out the mathematical focus of the entire device: the operation of involution posed as the “universal” operator and core of any dual structure (or principle of “duality”) – a notion that is approached in an identical manner by Weyl in the case of the transformation called automorphism for a “zero-dimensional” space (i.e. reduced to the structure of the point):

²² Ibid. p. 267.

We must insist for a moment on the way in which the distinction between left and right in the sensible world can symbolize the non-commutativity of certain abstract operations of algebra. The fundamental property of symmetry with respect to a plane is that, when performed once, it gives a figure distinct by its orientation from the primitive figure, and that, when repeated a second time, it gives back the primitive figure. It is in this sense that symmetry is called an involutive operation. Let us now consider an algebraic operation involving two quantities X and Y , and which we write (XY) , the parenthesis being able to designate an ordinary product, or any other operation defined on the two variables. It is a non-commutative operation if $(XY) \neq (YX)$ and the most fruitful non-commutativity in mathematics is that where we have $(XY) = - (YX)$. The operation (XY) is asymmetric in X and Y , but it is easily verified that it defines an involutive operation like ordinary symmetry. The expressions (XY) and (YX) are said to be antisymmetric and this word well translates the mixture of symmetry and asymmetry which is thus deeply installed at the heart of contemporary algebra.

The whole theory of continuous Lie groups is based on the non-commutativity of the product of two infinitesimal operations of the group, and it is this theory which, closely associated with the theory of Pfaff forms, expressions with antisymmetric multiplication, allowed Mr. Cartan to discover a profound analogy between the generalized Riemann spaces which intervene in the physico-geometric theories of Relativity, and the space of Lie groups²³.

It is these very fine considerations implying a deep knowledge of the structuring operations of algebras while at the same time referring to an anchoring in the sensible world which are, among all the others, at the origin of the current interest on the part of the true heirs of Lautman – Gilles Châtelet, Alain Badiou or Fernando Zalamea.

2.6 Dynamic Platonism: Moving Toward TSK Models in Mathematical Thought

The preceding analyses have laid a foundational framework for understanding the philosophical and mathematical conceptualization of ideas as living entities in flux rather than static absolutes (§ 1.1 & 1.2)). In doing so, they evoke a transformation of the Platonic tradition – traditionally understood as an ontology of immutable Forms – towards a dynamic and evolutionary model of mathematical thought and its historical development (§ 1.1 & 2.2). This transformation invites a reconsideration of the epistemological structures that underpin mathematical creativity, emphasizing the interrelations between phenomenology, metaphysics, and history.

²³ Ibid. 233.

In this intermediary reflection, we propose to deepen and articulate the dialectical tension between fixity and movement inherent in the Platonic corpus as revisited through the lens of Dynamic Platonism, especially as articulated by Lautman, and further developed in the conceptual apparatus of the TSK models (§ 3). These models integrate the topology of sheaves, the logic of Kripke structures, and the categorical rigor of Grothendieck topoi to form a robust architecture capable of capturing the multifaceted nature of mathematical thought. The discussion will foreground how this architecture offers a coherent metaphysical and epistemic framework where ideas are neither frozen nor purely subjective, but rather dynamically instantiated, stratified, and historically situated.

2.6.1 From Static Ontologies to Dynamic Idea-Structures

As previously noted (§ 1), the classical Platonic ontology posits ideas or Forms as eternal, perfect, and immutable entities existing in a realm apart from the sensory world. This vision has often been critiqued for its apparent detachment from historical and empirical realities. However, the Dynamic Platonism revisited in the French epistemological tradition – following Cavaillès, Lautman, and their successors – disrupts this static interpretation by emphasizing the historically contingent evolution of ideas within the mathematical praxis itself. Ideas are not transcendent monoliths but dynamic structures that evolve, stratify, and interact within temporal and conceptual horizons.

This shift from fixity to fluidity aligns with broader philosophical movements that resist reductive analyticism and static foundationalism. The Dynamic Platonism proposes that mathematical objects embody a creative tension: they are simultaneously invariant in their essential identity and susceptible to transformation through historical development and conceptual reinterpretation (§ 1.1). This dialectical movement reflects a plurality of levels – phenomenological, historical, cultural, and metaphysical – that intersect and generate new conceptual configurations.

2.6.2 Mathematical Thought as a Sheaf: Horizontality and Verticality

To capture this complexity, the notion of the sheaf provides a particularly apt metaphor and formal tool. A sheaf, in its mathematical sense, bridges local and global perspectives by organizing data (or ideas) over a base space in a way that allows for local coherence and global integration (§ 3.). In the philosophical context, this structure metaphorically corresponds to the dual aspects of mathematical thought: the technical and the imaginative.

The base space of the sheaf corresponds to the concrete technicalities of mathematics—the definitions, proofs, examples – while the fibers represent the conceptual images, intuitions, and ideas deployed over this base. This dual perspective echoes Pascal’s dictum of reason and heart intertwined, suggesting that mathematical thought is a living organism composed of folded technical precision and unfolded imaginative creativity. The horizontality of sections and the verticality of fibers within the sheaf metaphor captures the interplay of analytical and synthetic reasoning, between segmentation and integration, that constitutes mathematical creativity.

Importantly, this sheaf-theoretic model preserves the plurality of mathematical perspectives, accommodating diverse methods, foundational frameworks, and conceptual stratifications without reducing them to a singular, overarching schema. Thus, the sheaf provides a conceptual space where the multiplicity of mathematical visions coexist and interact dynamically.

2.6.3 Kripke Models and Dynamic Topoi

While the sheaf model elucidates the structural complexity of mathematical thought at a given synchronic moment, it remains fundamentally static in its classical formulation. The historical dimension – the diachronic evolution of mathematical ideas—necessitates an enrichment of this framework with a temporal and modal logic component. This is precisely where Kripke models become invaluable.

Kripke’s models, initially formulated for modal and intuitionistic logics, provide a natural topology that incorporates a directionality of time or possibility. By situating sheaves over Kripke models, one obtains a dynamic structure capable of representing not only static configurations but their unfolding and transformations through time. The base space gains a topological character reflecting temporal openness towards the future or interpretive modalities, allowing the model to capture the genesis, obstruction, and evolution of mathematical ideas historically.

This union of sheaves and Kripke models yields the SK model: a dynamic conceptualization of mathematical thought as an evolving sequence of sheaves over temporal structures. The SK model acknowledges internal phenomenological changes and external historical transitions, offering a nuanced perspective on mathematical development as both a local sedimentation of ideas and a global historical trajectory.

2.6.4 Towards a Higher Synthesis: Grothendieck Topoi and the TSK Model

Grothendieck's conception of topoi further elevates this conceptual edifice by embedding sheaves within a categorical universe where one considers all sheaves over a given site as a collective whole. This higher-level unity enables a movement from multiplicity back to a new form of unity, wherein archetypes or metaphysical universals are not static Platonic absolutes but flexible structural patterns realized through exactness properties and functorial correspondences.

The TSK model thus integrates three strata: the technical, the phenomenological, and the historical-dynamic, creating a conceptual ecosystem where metaphysics and phenomenology interact within historical temporality. The result is a dynamic Platonic structure – where ideas are archetypes projected onto phenomenological substrata and dynamically modulated through temporal histories (§ 3.2 & 3.3).

This synthesis offers a powerful framework for approaching longstanding philosophical questions concerning the nature of mathematical truth, creativity, and the ontology of mathematical objects. It invites a reconsideration of Platonism, not as a static doctrine of eternal forms, but as a living, elastic metaphysics that accommodates the creative tensions and historical transformations characteristic of mathematical practice.

2.6.5 Philosophical Implications and the Contemporary Relevance of Dynamic Platonism

The dynamic, multi-level framework of the TSK model resonates with contemporary philosophical concerns regarding interdisciplinarity, creativity, and the limits of reductionism. It challenges the analytic reduction of mathematical knowledge to mere formal manipulation by reinstating imagination, intuition, and historical situatedness as essential components of mathematical understanding.

Moreover, the distinction highlighted between interdisciplinarity and trans-disciplinarity underscores the generative potential of transposing specificities across different domains to awaken new creative resonances. Dynamic Platonism, in this view, serves as a philosophical anchor for transdisciplinary thought, illuminating how mathematical ideas can traverse and transform across conceptual boundaries.

The implications extend beyond philosophy of mathematics to epistemology, metaphysics, and even cognitive science, suggesting new paradigms for understanding how knowledge systems evolve dynamically within their historical and cultural milieux.

In summation, the intermediary conceptual space carved out by Dynamic Platonism and instantiated through the TSK models offer a fertile ground for rethinking mathematical thought. It transcends reductive dichotomies of static versus dynamic, local versus global, technical versus imaginative, and phenomenological versus metaphysical. Instead, it proposes a richly stratified, temporally sensitive, and conceptually pluralistic ontology of mathematical ideas that aligns with the evolving nature of mathematical practice itself.

This framework prepares the ground for the subsequent analysis, in which the precise technical and philosophical articulations of the TSK model will be deployed to illuminate the multifaceted dialectics of mathematical knowledge and the role of dynamic ideas within it.

3.1 Dynamic Platonism in TSK Models

Sections 1 and 2 of this paper have examined in detail the concept of Dynamic Platonism and its development within the work of Albert Lautman. At first glance, as already observed (§ 1), the terminology may appear contradictory, bringing together (a) the notion of a Platonism grounded in fixed ideas and (b) a historical, evolutionary, and creative dynamism associated with the practice of mathematics. However, as extensively demonstrated (§ 1 & § 2), such a contradiction is only apparent. The original matrix of Platonism is far removed from a static interpretation—a misreading too often perpetuated in the history of philosophy.

Ideas, far from being immobilized within an unknowable Absolute, move and evolve through a constant flux, shaped by accelerations and halts in historical time (Cavaillès), tensions and mixtures (Lautman), stratifications and horizons (Desanti), projections and injections (Grothendieck), diagrams and blind spots (Châtelet), and logical spaces in fluxion (Badiou).

In particular, Lautman's conception of Dynamic Platonism is fascinating on multiple levels (§ 2). The diversity of mathematical thought, irreducible to any single perspective (e.g., the analytic) or foundational system (e.g., set theory), necessitates a multiplicity of visions to begin to grasp its vast complexity. In our current era – often marked by epistemological disorientation – it is worth emphasizing the critical role of the prefix TRANS, especially in contrast to INTER. Interdisciplinarity, often celebrated uncritically, tends to focus on finding common intersections between distinct domains of knowledge.

Trans-disciplinarity²⁴, by contrast, seeks to transpose non-shared specificities across different domains, with the aim of awakening (to use Benjamin's typographical emphasis in the Arcades Project) creative resonances through transposition. Whereas INTER helps to explain, TRANS helps to invent²⁵.

One can trace this awakening of mathematical imagination in the splendid *Plato's Mathematical Imagination* by Brumbaugh²⁶. Through a rigorous study of figures and symbols associated with incommensurability in Platonic imagery, Brumbaugh demonstrates how phenomenological, historical, cultural, and metaphysical dimensions intertwine and mutually reactivate one another through continuous TRANS movements. Years earlier, in his doctoral dissertation, *Essais sur les notions de structure et existence en mathématiques* (1938)²⁷, Lautman had already discerned – building on the work of Robin, Stenzel, and Becker (see Section 2 of this article) – that Platonic number-ideas, far from residing in a fixed Absolute, combine dynamic geometric schemas in which, once again, phenomenological, historical, cultural, and metaphysical levels are interwoven.

The richness of these crossings and amalgamations²⁸ is manifest not only in modern and contemporary mathematical invention but is also found in embryonic form within a dynamic, open, elastic, and complex Platonism such as the one presented in this paper. One of Lautman's great merits lies in having rediscovered, within the original Platonic texts and their reinterpretation by the German tradition, flexible and sufficiently universal concepts that may be applied to a detailed understanding of the mathematical dialectics of his time²⁹.

²⁴ Rosa María Rodríguez Magda, *La sonrisa de Saturno. Hacia una teoría transmoderna*, Barcelona: Anthropos, 1989; Rosa María Rodríguez Magda, *Transmodernidad*, Barcelona: Anthropos, 2004

²⁵ This text originates from a presentation given at the conference *Diagrams and Gestures. Cross-Disciplinary Perspectives*, held at the Università degli Studi di Palermo on April 6, 2023, and organized by Francesco La Mantia. On that occasion, taking advantage of the remarkable Sicilian context, I contrasted an example of INTER—centered on Fibonacci and the golden ratio—with an example of TRANS—focused on Serpotta and his extraordinary stuccoes in the Palermitan Oratories. The opposition between number (INTER) and form (TRANS) served to elucidate Serpotta's free imagination and his anticipation of non-rigid geometries, in line with the admirable analyses of Donald Garstang.

²⁶ Robert S. Brumbaugh, *Plato's Mathematical Imagination*, Bloomington: Indiana University Press, 1954.

²⁷ Albert Lautman, *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, Paris : 10/18, 1977; Albert Lautman, *Les Idées, les mathématiques et le Réel physique*, Paris: Vrin, 2005.

²⁸ Reference texts: Henri Poincaré, *L'invention mathématique*, Paris: Institut Général Psychologique, 1908; Lautman, *passim*; Alexandre Grothendieck, *Récoltes et semailles*, manuscrit, 1983-1986; Alexandre Grothendieck, *La clef des songes*, manuscrit, 1987.

²⁹ Jean Dieudonné, with his characteristic grace and generosity, recalls in the preface to the 10/18 reedition of Lautman's work how Lautman's vision stood at the very

In what follows, we will present a new model – the TSK model – for articulating the complexities of mathematical thought (§ 3.2). We will then employ this model to provide a robust framework for Lautman’s Dynamic Platonism (§ 3.3).

3.2 Dynamic Platonism: A Sheaf-Theoretic Approach

A simple idea – following Grothendieck’s precept on the fundamental importance of simplicity in mathematics – has guided the development of our TSK models for mathematical thought³⁰. The core intuition is to conceive mathematics as an activity where reason and heart intertwine (a homage to Pascal), and where a technical base (definitions, proofs, examples) supports an imaginative space (concepts, images, intuitions) that unfolds upon it. For this purpose, the notion of a mathematical sheaf (Jean Leray, Oflag XVIIA officers’ camp, 1940–45) proves especially appropriate and flexible (see Figure 1). A sheaf consists, quite simply, of two topological spaces E and X , and a well-behaved projection p (a “local homeomorphism”) that enables the reconstruction of the deployed space E from local gluings and stratifications over the base X . The fibers of the sheaf are the pointwise inverse images $p^{-1}(x)$, $x \in X$, while the sections are the inverse images of open neighborhoods $p^{-1}(O)$, $O \text{ ouvert} \subseteq X$. Understanding a sheaf thus involves combining vertical (fiberwise) and horizontal (section-wise) perspectives, with the aim of determining whether and how local sections can be coherently glued into a global section. Sheaves pervade virtually every domain of mathematics. Two paradigmatic examples include the sheaf of germs of holomorphic functions (Riemann–Poincaré–Cartan) and the structural sheaf of a ring (Galois–Dedekind–Grothendieck).

forefront of its time and even surpassed Dieudonné’s own (formidable) mathematical training.

³⁰ The models were conceived and developed within our *Seminar on the Philosophy of Mathematics*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2016–2017. A resulting essay is Fernando Zalamea, *Modelos en haces para el pensamiento matemático*, Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2021. We refer the reader to this volume for extensive details and examples.

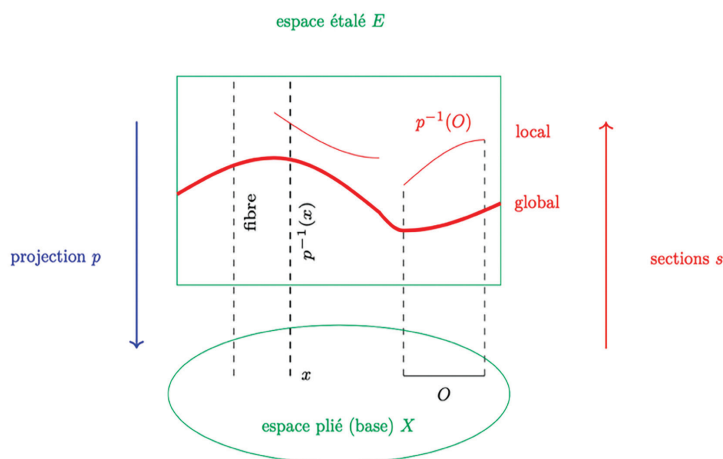


Figure 1
A sheaf: spaces, projections, fibers, sections

Following the line of thought developed by Cavaillès, Lautman, Desanti, and Châtelet, the vast variety of phenomenological levels in mathematics naturally leads us to understand mathematical thinking as a conceptual bundle, within which a dialogue unfolds among diverse partial horizons (see Figure 2).

According to this model (S), the base space contains mathematical techniques: definitions, theorems, examples. In the unfolded space reside the concepts, images, notions, and ideas that project onto these techniques. In this way, mathematics simultaneously combines differential (analytic) techniques and integral (synthetic) conceptualizations, situated on levels and stratifications that are irreducible to one another.

Both the deployed imagination (heart) and the folded technique (reason) are necessary for the rich and complex development of mathematics.

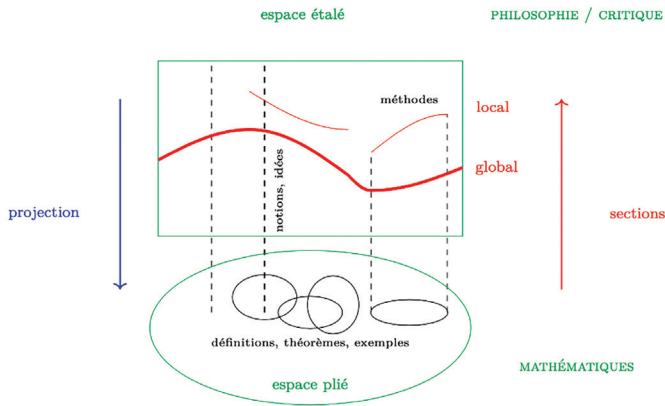


Figure 2
Model F: Mathematical Thought (Fixed) as a Sheaf

The model (S) captures the stratifications, levels, transitions, and obstructions of mathematical thought, grounded in a precise understanding of its phenomena. However, at first glance, its structure is static, fixed in time, and does not account for the dynamic aspects of mathematical development. A sense of historical evolution must therefore be incorporated into the model.

To this end, we can draw on a Kripke model (a concept introduced by a very young Saul Kripke around 1960) and situate it on the basis of a sheaf, equipped with the natural topology induced by the model. This gives rise to the topology of order, with an orientation toward the future in the case of an intuitionistic model, or to the topology of an arbitrary relation, allowing for past-future interpretative dynamics in the case of a modal model.

By employing Kripke models, we can introduce a dynamic register of mathematical phenomena, situating them within a temporal model that is either intuitionistic (development) or modal (contraction). In the following model (see Figure 3), we envision a sequence of sheaves deployed over an intuitionistic Kripke model. We denote this dynamic model as (SK).

This model addresses issues related both to internal history (phenomenological “internal” sections over synchronic periods) and to external history (phenomenological “external” sections over diachronic periods, tracing transitions toward the future or perceiving obstructions toward the past).

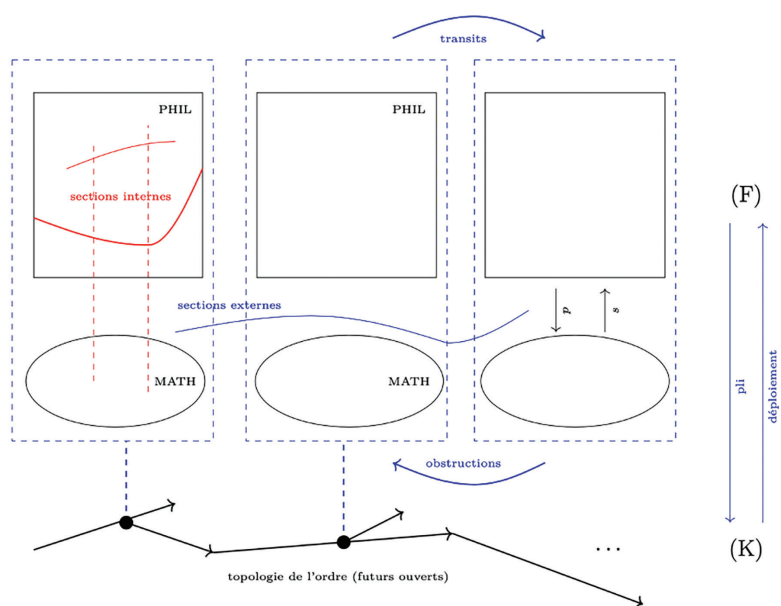


Figure 3

SK Model. Mathematical thought (in its dynamic form) as a sequence of sheaves

Sheaves became central, during the 1950s and 1960s under the French school of Cartan, Serre, Godement, and Grothendieck, to foundational mathematical work in several complex variables, algebraic topology, and algebraic geometry.

The celebrated Riemann–Roch–Grothendieck theorem (1955–1957), which recovers the classical Riemann–Roch equation (with all its geometric, complex, algebraic, and differential depth) as a special case of a projection from the K-theory group (of coherent algebraic sheaves) onto the homology of the underlying space³¹, opened a vast panorama for the use of sheaves.

The process of (1) unity $\rightarrow$ (2) multiplicity $\rightarrow$ (3) renewed unity – starting from an initial unity at one level, unfolding into multiplicity at a second, and culminating in a new synthesis at a third – has led to extraordinary advances in mathematical thought (many major constructions by Galois, Riemann, Poincaré, Cantor, Hilbert, Gödel, and Grothendieck follow this method).

³¹ For a comprehensive treatment of all these topics, see Fernando Zalamea *Grothendieck. Una guía a la obra matemática y filosófica*, Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2019. 618pp.

A major culmination of this process is the emergence of the Grothendieck topos (1958–1962), in which one begins with (1) a topological space (or its categorical analogue, a site), then considers (2) all sheaves over this space, and finally (3) the unified collection (a category) of all these sheaves.

This complete totality – the topos – unfolds a new structure absent in the base space.

The simple gesture (1)–(2)–(3), embedded in the formation of a topos, is akin to the act of a conductor: beginning with (1) a musical score, (2) the instruments unfold its sounds, and are brought into unity under (3) the conductor’s baton.

Only in the combination of all three levels does the full richness of a concert or symphony emerge.

In a Grothendieck topos, archetypes (metaphysical structures), captured by the topos’s exactness properties, can be projected onto underlying types (phenomenological structures), which in turn may be reintegrated into higher-level constructions.

This back-and-forth between phenomenology and metaphysics enters into an unexpectedly new sphere of knowledge—made possible by contemporary mathematics.

Our model (TSK) captures this situation in a straightforward manner (see Figure 4).

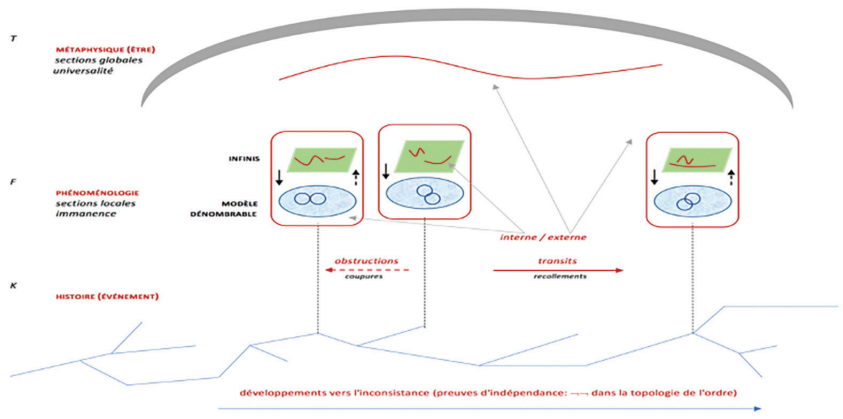


Figure 4
TSK Model: History, Phenomenology, and Metaphysics in Active Dialogue
with Mathematics

3.3 Dynamic Platonism in the TSK Models

The (TSK) model incorporates the major elements of Dynamic Platonism, with the sobriety, precision, and exactitude afforded to thought by contemporary mathematics. The (K) level captures the dynamic movement of ideas (Lautman) and their active insertion into the history of mathematics (Cavaillès). The (S) level investigates the stratifications, horizons, and phenomenological layers (Desanti), where mathematical inventions, on one hand, sediment into “sheets,” and on the other, erupt at blind spots (Châtelet). The (T) level provides a view of “relative universals,” or archetypes (Grothendieck, Badiou), which govern a creative metaphysics of ideas through the projective construction of types.

The combination of these three levels – within the Topoi of Sheaves over Kripke Models (TSK) – offers a unique perspective on the interweaving of history, phenomenology, and metaphysics, as sought by the Dynamic Platonism of the French epistemological school.

The technical instruments employed in the (TSK) models, along with their numerous applications in grasping mathematical thought in action, help us to engage with the fundamental questions posed by Deleuze in the final lecture of his Course on Foucault³². In his deep reading of *Moby-Dick*; or, *The Whale*³³ (1851) and *Pierre*; or, *The Ambiguities* (1852), Deleuze constructs a diagram around Melville’s “Whaling Line,” wherein dense strata of language are examined, unfolded, and inverted³⁴ through folds and unfoldings within an “Oceanic Zone” of understanding. Deleuze evokes the mathematical genius of Galois and his proofs as composed of “ellipses, deviations, precipitations, flashes.”

Situated between Lautman’s “mixtures” and Châtelet’s “blind spots,” Deleuze proposes a complex mode of approach to a complex reality. No philosophical reduction – especially of the analytic kind – can adequately account for this complexity. The velocity of thought is evoked through mediations, turns, and ramifications. The (TSK) models, particularly attuned to these dynamic elasticities, offer a new point of support for this long-standing French tradition.

³² Lecture of May 25, 1986, cf. Gilles Deleuze, *Curso sobre Foucault. La subjetivación*, Tomo 3, Buenos Aires: Cactus, 2015, pp. 173-204 (the Spanish transcription has not yet been published in French).

³³ Hermann Melville, *Moby-Dick, or The Whale*, Illustrations by Rockwell Kent, London: The Folio Society, 2009.

³⁴ Cf. Pavel Florensky, *La perspective inversée suivie de L'Iconostase*, Lausanne: L'Age d'Homme, 1992.

4. Conclusion: Embracing the Dynamic Ontology of Mathematical Ideas

The exploration of Dynamic Platonism through the lens of the TSK models reveals a profound transformation in how we conceive the ontology and epistemology of mathematical entities. This approach, grounded in the philosophical insights of Lautman and contemporaries, signifies a departure from traditional static notions of Forms and embraces a vibrant, evolving universe of ideas that are both structurally invariant and historically situated. Such a perspective not only aligns with the evolving nature of mathematical practice but also offers a fertile framework for understanding the complex interplay between thought, history, and metaphysical structures.

At the heart of this paradigm shift lies the recognition that mathematical objects are not eternal, immutable entities inhabiting a realm detached from human activity and historical development. Instead, they are dynamic, living schemas that develop, stratify, and metamorphose within the fertile ground of human culture, scientific progress, and phenomenological experience. This conception resonates with Lautman's metaphysical vision, which emphasizes the dialectical tensions, symmetries, and asymmetries that animate the genesis of mathematical ideas. The notion of invariance, therefore, becomes nuanced – localized and contextual, yet capable of extending across diverse formal and conceptual horizons.

The sheaf-theoretic and topos-theoretic formalizations embedded within the TSK models serve to articulate this fluidity with mathematical rigor. Sheaves, as conceptual bundles that organize local data into coherent global structures, metaphorically encapsulate the layered nature of mathematical thought – its technical definitions, intuitive images, and conceptual horizons. When combined with Kripke models and the categorical richness of Grothendieck topoi, these structures embody the dynamic, temporally sensitive evolution of ideas, capturing both their local genesis and their global development through time.

This multi-layered architecture underscores the importance of transdisciplinary thinking – mtransposing ideas across different domains, modalities, and cultural contexts – to foster the creative genesis characteristic of genuine mathematical innovation. It emphasizes that mathematical knowledge is not merely accumulated but continually reconfigured through dialectical processes akin to those Lautman delineates: the tension between form and matter, symmetry and asymmetry, stability and flux. Such a view invites us to see mathematics as a living organism, whose shape and substance are perpetually in flux, responding to internal logical constraints and external historical stimuli.

Furthermore, the conceptual shift from static ontologies to dynamic idea-structures challenges the foundationalist quest for absolute certain-

ties. Instead, it promotes a view of mathematical truth as a historically situated, contextually modulated, and structurally invariant process. This aligns with contemporary philosophical trends that advocate for a pluralistic, process-oriented understanding of scientific and mathematical knowledge, recognizing the role of intuition, imagination, and cultural embedding in shaping mathematical discovery. It also opens avenues for integrating phenomenological insights, emphasizing the lived experience of mathematical practice as a central element in understanding the genesis and development of ideas.

The implications of this dynamic perspective extend beyond philosophy and into the very practice of mathematics. It suggests that mathematical creativity involves navigating a landscape of partial invariances – local truths, formal schemas, and conceptual horizons – that can be recombined, extended, or replaced as contexts evolve. This view fosters a more flexible, resilient understanding of mathematical rigor – one that accommodates the provisional, exploratory, and often nonlinear pathways of discovery. It also underscores the importance of formal tools like sheaves and topoi not merely as technical devices but as conceptual metaphors for the living processes of mathematical thought.

In essence, the synthesis offered by the TSK models and the broader framework of Dynamic Platonism advocates for a reimagining of mathematics as an active, historically embedded enterprise – an ongoing dialogue between ideas and contexts, invariance and flux, form and matter. Such a conception aligns with the philosophical heritage of Lautman and the French epistemological tradition, which refuses to reduce mathematical truth to static absolutes, favoring instead a dynamic, relational, and processual understanding. It recognizes that the evolution of mathematical ideas is both a reflection of human creativity and a manifestation of deeper structural patterns – patterns that are simultaneously invariant and plastic, universal and particular.

This perspective also invites us to reconsider the nature of mathematical objectivity itself. Rather than viewing it as an external, pre-existing realm of perfect Forms, we can see it as a product of collective human activity – a continually reshaped landscape of idealities, schemas, and invariants that emerge, develop, and sometimes fade within the dialectical flow of history. The invariance of certain mathematical results, such as the sum of interior angles of a triangle in Euclidean geometry, becomes a local invariance – valid within particular formal systems – rather than an absolute, unchanging truth. Their persistence over time is thus understood as a form of partial invariance, a stable horizon within a broader flux.

Moreover, this dynamic ontology encourages a more nuanced appreciation of the role of formal structures, such as category theory and sheaf theory, as not merely tools but as conceptual frameworks that mirror the

living, relational fabric of mathematical ideas. These structures facilitate the articulation of both the local and global, the static and the dynamic, enabling mathematicians to model the emergence, evolution, and interconnection of ideas in a rigorous yet flexible manner.

In conclusion, the integration of the TSK models within the philosophy of Dynamic Platonism signifies a paradigm shift – one that recognizes the living, evolving character of mathematical ideas and their foundational structures. It advocates for a conception of mathematical objectivity as a dynamic, relational, and historically embedded phenomenon, rich in dialectical tensions and creative potentials. This approach not only advances philosophical understanding but also offers practical insights into the practice of mathematics itself—highlighting the importance of imagination, transdisciplinary exchange, and the ongoing negotiation between invariance and flux. As contemporary mathematics continues to expand its horizons into new territories – be it in higher categories, homotopical methods, or computational paradigms – the philosophical framework of Dynamic Platonism and the TSK models provide a vital compass, guiding us through the complex, vibrant landscape of mathematical thought in the twenty-first century and beyond.

Bibliography

- Badiou, Alain. *Cours Traité d'Ontologie Transitoire*. Paris: Les Éditions du Seuil, 2005.
- Becker, Oskar. *Mathematische Existenz*. Berlin: De Gruyter, 2013 (1973).
- Brumbaugh, Robert S. *Plato's Mathematical Imagination*. Bloomington: Indiana University Press, 1954.
- Corfield, David. "Commentaire sur Emmanuel Barot: Lautman." *Philosophiques* 37, no. 1 (2010): 210.
- Deleuze, Gilles. *Curso sobre Foucault. La subjetivación*. Tomo 3. Buenos Aires: Cactus, 2015.
- Dieudonné, Jean. *Preface to the reedition of Lautman's work*. In *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*. Paris: 10/18, 1977.
- Florensky, Pavel. *La perspective inversée suivi de L'Iconostase*. Lausanne: L'Âge d'Homme, 1992.
- Grothendieck, Alexandre. *La clef des songes*. Manuscript, 1987.
- Récoltes et semailles. Manuscript, 1983–1986.
- Husserl, Edmund. *Erfahrung und Urteil. Untersuchungen zur Genealogie der Logik*. Berlin: Academia/Verlagsbuchhandlung Prag, 1939.
- Lautman, Albert. *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*. Paris: 10/18, 1977.
- Lautman, Albert. *Les Idées, les mathématiques et le Réel physique*. Paris: Vrin, 2005.
- Lawvere, Francis William, and Robert Rosebrugh. *Sets for Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

- Lawvere, Francis William, and Stephen Schanuel. *Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Linnebo, Øystein. "Platonism in the Philosophy of Mathematics." In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2024 Edition), edited by Edward N. Zalta and Uri Nodelman. <https://plato.stanford.edu/archives/sum2024/entries/platonism-mathematics/>.
- Magda, Rosa María Rodríguez. *La sonrisa de Saturno. Hacia una teoría transmoderna*. Barcelona: Anthropos, 1989.
- Magdam Rosa María Rodríguez. *Transmodernidad*. Barcelona: Anthropos, 2004.
- Melville, Hermann. *Moby-Dick, or The Whale*. Illustrations by Rockwell Kent. London: The Folio Society, 2009.
- Petitot, Jean. "A Transcendental View on the Continuum: Woodin's Conditional Platonism." *Intellectica* 15 (2009): 99.
- Poincaré, Henri. *L'invention mathématique*. Paris: Institut Général Psychologique, 1908.
- Resnik, Michael. *Frege and the Philosophy of Mathematics*. Ithaca and London: Cornell University Press, 1980.
- Slowik, Peter. *The Deep Metaphysics of Space*. Dordrecht: Springer, 2016.
- Smith, Peter. *Explaining Chaos*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Tieszen, Richard. *After Gödel*. Oxford: Oxford University Press, 2011.
- Zalamea, Fernando. *Grothendieck. Una guía a la obra matemática y filosófica*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2019.
- Zalamea, Fernando. *Modelos en haces para el pensamiento matemático*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2021.
- Zalamea, Fernando. *Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics*. Cambridge, MA: Urbanomic.

Platonismo dinamico: matematica, gesto e filosofia

Il saggio esplora il concetto di Platonismo Dinamico come quadro trasformativo per comprendere l'ontologia e la pratica matematica. Superando il platonismo ontologico tradizionale, che postula Forme eterne e immutabili, il platonismo dinamico mette in evidenza il carattere fluido, storicamente situato e diagrammaticamente attuato delle idealità matematiche. Ispirandosi al lavoro di Lautman, Cavaillès e a modelli contemporanei come la TSK, gli autori mostrano come gli oggetti matematici siano dinamicamente costituiti attraverso gesti, diagrammi e processi formali che evolvono in contesti specifici. Questo approccio concilia invariabilità e mutamento, concependo le verità matematiche come invarianti parziali immerse nel flusso della storia e dell'attività incarnata. Integrando intuizioni fenomenologiche di Husserl e Merleau-Ponty con modelli categoriali e topologici, il platonismo dinamico propone un'ontologia sfumata, in cui le idee non sono né fisse né puramente soggettive, ma stratificate, relazionali e temporalmente estese. Tale prospettiva invita a una rivalutazione dell'oggettività matematica, ponendo l'accento sul processo, sull'incarnazione e sulla potenza virtuale delle pratiche diagrammatiche nel ragionamento matematico.

PAROLE CHIAVE: Platonismo dinamico, ontologia matematica, pratiche diagrammatiche, incarnazione, idealità matematiche.

Dynamic Platonism: Mathematics, Gesture, and Philosophy

This paper explores the concept of Dynamic Platonism as a transformative framework for understanding mathematical ontology and practice. Moving beyond traditional ontological Platonism, which posits eternal, unchanging mathematical Forms, Dynamic Platonism emphasizes the fluid, historically situated, and diagrammatically enacted nature of mathematical idealities. Drawing from the work of Lautman, Cavaillès, and contemporary models such as TSK, the authors highlight how mathematical objects are dynamically constituted through gestures, diagrams, and formal processes that evolve within specific contexts. This approach reconciles invariance with change, viewing mathematical truths as partial invariants embedded in a flux of history and embodied activity. By integrating phenomenological insights from Husserl and Merleau-Ponty with category-theoretic and topological models, Dynamic Platonism offers a nuanced ontology where ideas are neither fixed nor purely subjective but are instead stratified, relational, and temporally extended. The framework invites

a reevaluation of mathematical objectivity, emphasizing process, embodiment, and the virtual power of diagrammatic practices in mathematical reasoning.

KEYWORDS: Dynamic Platonism, mathematical ontology, diagrammatic practices, embodiment, mathematical idealities.

Nicola Gianola

Idee per una decostruzione del platonismo matematico a partire da Wittgenstein

Introduzione

L'obiettivo di questo contributo è estrapolare una critica radicale al platonismo matematico dalle osservazioni che Wittgenstein dedica ai fondamenti della matematica. Intendo mostrare in che senso, nelle sue considerazioni, Wittgenstein metta in atto una vera e propria decostruzione della rappresentazione platonizzante della matematica. Da un lato, infatti, tali osservazioni permettono di formulare una critica volta a evidenziare i limiti di questa visione della matematica, soprattutto per quanto riguarda la sua capacità di chiarire alcune questioni filosofiche. Al contempo, la critica di Wittgenstein si configura come un'indagine che mira a ricostruire la genealogia concettuale di tale immagine teorica, allo scopo di disinnescare l'apparente autoevidenza.

Prima di entrare nel merito del testo, tuttavia, è opportuno chiarire un'indicazione metodologica. Com'è noto, lo stile aforistico con cui Wittgenstein era solito scrivere, unito alla sua convinzione meta-filosofica secondo cui non possono esserci teorie in filosofia, rende particolarmente arduo attribuirgli una posizione teorica definita. Uno dei rischi più comuni, per gli studiosi del suo pensiero, è proprio quello di imputargli convinzioni o tesi che egli stesso avrebbe potuto rifiutare. Per questa ragione, nel presente contributo non intendo pormi come fine la ricostruzione filologicamente accurata dell'opinione di Wittgenstein sul platonismo, e attribuirgli così una posizione filosofica precisa. L'intento sarà piuttosto di natura ermeneutico-teoretica: sospendendo il giudizio sull'autenticità di tali posizioni, cercherò di ricostruire una trama di pensieri e argomenti che trovano riscontro nelle osservazioni di Wittgenstein, le quali, a mio giudizio, possono indicare una via per mettere in crisi il platonismo ma-

tematico. Ritengo infatti che un simile approccio si sposi bene con lo stile filosofico di Wittgenstein e possa rivelarsi molto più fruttuoso di uno prettamente ricostruttivo, data la natura del suo lavoro, che, più che avere l'obiettivo di esporre idee definitive, costituisce un invito e uno stimolo a pensare filosoficamente in modo autentico e autonomo. Infine ritengo opportuno sottolineare che, a causa dell'originalità degli argomenti qui presentati, il riferimento diretto alla bibliografia dedicata alla filosofia della matematica di Wittgenstein non potrà che essere limitato ai soli casi in cui le considerazioni degli autori si intrecciano con la linea di pensiero qui proposta.

L'articolo sarà suddiviso in tre parti. Nella prima parte presenterò una sintesi del platonismo matematico, prendendo le mosse dalla posizione di G. H. Hardy, oggetto delle critiche di Wittgenstein. Nella seconda parte affronterò un problema centrale: la giustificazione della generalità della dimostrazione matematica. Illustrerò perché il platonismo possa apparire una posizione convincente e attrattiva e, al contempo, presenterò l'alternativa proposta da Wittgenstein. Infine, nella terza parte individuerò le tre fonti principali dell'immagine platonista della dimostrazione matematica, mostrando così la natura illusoria delle soluzioni suggerite da questa prospettiva.

1. Il platonismo matematico e la concezione telescopica della prova matematica

Il platonismo matematico rappresenta una delle principali e più diffuse concezioni della matematica elaborate nella storia della filosofia. Affonda le sue radici nel pensiero antico, trovando in Platone il suo capostipite, e si è progressivamente sviluppato nel corso dei secoli, influenzando il pensiero di numerosi filosofi e matematici del Novecento. Frege, Russell, Gödel, Cantor e altri importanti protagonisti del dibattito sui fondamenti della matematica nel XX secolo hanno tutti abbracciato, in forme differenti, una concezione platonista della matematica¹. Ancora oggi, nel

¹ Per un'introduzione molto ben scritta e teoreticamente efficace alla storia della filosofia della matematica si consiglia: S. Shapiro, *Thinking About Mathematics*, Oxford University Press, 2000. Per quanto riguarda invece la filosofia della matematica di Wittgenstein si consigliano: S. Schroeder, *Wittgenstein on Mathematics*, Routledge, 2021 (particolarmente indicato per la comprensione del presente lavoro); J. Floyd, *Wittgenstein's philosophy of mathematics*, Cambridge University Press, 2021; M. Plebani, *Reconsidering Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, Tesi di dottorato, Università Ca' Foscari di Venezia, 2010; P. Frasca, *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, Routledge, 1994; S. Shanker, *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics*, State University of New York Press, 1987.

dibattito contemporaneo in filosofia della matematica, sono numerosi gli autori che sostengono posizioni riconducibili a questa visione: si pensi, ad esempio, allo strutturalismo *ante rem* di autori come Shapiro², o all'argomento dell'indispensabilità elaborato da Quine e Putnam, entrambe concezioni che possono essere correttamente annoverate tra le possibili versioni del platonismo³.

Proprio a causa della vasta sua diffusione e della conseguente molteplicità di varianti e formulazioni di questa concezione, non è semplice offrire una rappresentazione sintetica e schematica del nucleo concettuale condiviso da tutte le versioni del platonismo matematico. Un'analisi rigorosa di tale orientamento filosofico richiederebbe un'indagine approfondita a parte, volta a mettere in evidenza le differenze tra le sue diverse articolazioni storiche e teoriche.

Ciononostante, ai fini del presente contributo, cercherò di proporre una visione sintetica del platonismo matematico, prendendo spunto dalle affermazioni di un matematico che ha difeso in modo esplicito e deciso una concezione platonista della matematica: G. H. Hardy. L'interesse per la sua formulazione è motivato dal fatto che le osservazioni critiche di Wittgenstein contro la visione platonista sembrano rivolgersi, in particolare, proprio alle considerazioni espresse da Hardy.

In estrema sintesi, il platonismo matematico può essere descritto come una teoria filosofica volta a spiegare la natura degli oggetti matematici (problema ontologico) e, al tempo stesso, a giustificare lo statuto epistemico delle proposizioni matematiche, in particolare la loro necessità e universalità (problema epistemologico). Possiamo dunque definire il platonismo come un insieme di ontologia e epistemologia degli oggetti matematici, elaborato per rendere conto della validità e della giustificazione delle proposizioni matematiche.

Da questa prospettiva, gli oggetti matematici (numeri, forme geometriche, insiemi, funzioni, ecc.) sono considerati entità astratte, distinte dagli oggetti fisici, che esistono indipendentemente dalla nostra mente, albergando in un piano di realtà separato da quello della realtà sensibile. Al

² cfr. G. Hellman, S. Shapiro, *Mathematical Structuralism*, Cambridge University Press, 2018. Lo strutturalismo matematico è una prospettiva relativamente nuova in filosofia della matematica di stampo realista, fondata dal filosofo Stewart Shapiro. Secondo questa visione, il realismo matematico può essere riabilitato sostenendo che la matematica non si occupa dello studio di oggetti astratti collocati in una dimensione separata, ma dello studio di strutture che – almeno nella versione *ante-rem* difesa da Shapiro – preesistono alle loro istanziazioni.

³ Per approfondire il tema del platonismo matematico, tutt'ora molto dibattuto, si consigliano: E. Landry, *Plato Was Not a Mathematical Platonist*, Cambridge University Press, 2023; Ø. Linnebo, *Platonism in the Philosophy of Mathematics*, in Stanford Encyclopedia of Philosophy; M. Panza, A. Sereni, *Plato's Problem: An Introduction to Mathematical Platonism*, Palgrave Macmillan, 2013.

tempo stesso, però, esse devono anche essere in qualche modo connesse al nostro mondo, in quanto le cose stesse sono modellate a loro immagine e somiglianza. Secondo questa concezione, la matematica si configura come una scienza fondata e giustificata, il cui compito è indagare la natura di tali oggetti, le loro proprietà e le relazioni che li connettono. I teoremi che costituiscono il corpo della matematica sarebbero quindi autentiche proposizioni – vere e giustificate – che vertono su questi oggetti eteri. Così Hardy sintetizza il nocciolo della sua concezione:

I teoremi matematici sono veri o falsi; la loro verità o falsità è assoluta e indipendente dalla conoscenza che ne abbiamo. In un certo senso, la verità matematica fa parte della realtà oggettiva⁴

La realtà matematica giace fuori di noi e la nostra funzione è quella di scoprirla e osservarla, e i teoremi che noi dimostriamo, e che in modo magniloquente descriviamo come nostre “creazioni”, sono semplicemente i resoconti delle nostre osservazioni⁵

Questa è, dunque, in estrema sintesi l'immagine platonica della matematica. A partire da qui, intendo mettere subito in risalto un primo bersaglio critico che Wittgenstein sembra prendere di mira. Da un punto di vista epistemologico, infatti, la concezione platonista considera l'insieme dei teoremi matematici come il corpo di conoscenze che i matematici hanno faticosamente ottenuto, disvelando passo dopo passo il regno delle forme. Questa considerazione epistemologica sul significato della conoscenza matematica non può che tradursi in una certa rappresentazione della natura delle dimostrazioni matematiche. Se infatti la matematica è una scienza che ha per oggetto le forme matematiche, poiché le dimostrazioni costituiscono gli strumenti attraverso cui questa indagine viene eseguita, ne consegue che, da tale prospettiva, le dimostrazioni matematiche sono concepibili come uno strumento esteriore (analogo a un cannocchiale) attraverso cui i matematici indagano e scoprono le proprietà che gli oggetti matematici, che albergano nel mondo delle forme, possiedono in sé e indipendentemente da noi:

Immaginiamo che qualcuno produca una dimostrazione; la possibilità di questa dimostrazione non costituisce forse un fatto, che appartiene al regno della matematica? Se costui la trova, vuol dire che in qualche modo c'è già. Dev'essere una struttura possibile. (...) Frege, che era un gran pensatore, disse che, benché si dica in Euclide che tra due punti qualsiasi può essere tracciata una retta, di fatto la retta esiste già, anche se nessuno l'ha tracciata. L'idea è che c'è un regno della geometria, nel quale esistono gli oggetti geometrici. Quel che nel mondo ordinario viene chiamato possibilità, nel mondo geo-

⁴ G. H. Hardy, *Mathematical Proof*, in *Mind*, New Series, 1929, p. 4, traduzione nostra.

⁵ G. H. Hardy, *Apologia di un matematico*, Garzanti, 2002.

metrico costituisce una realtà [...]. La possibilità concepita come un genere diverso di realtà, un'ombra della realtà, per così dire⁶

A giudizio di Wittgenstein, quest'idea secondo cui esisterebbe un mondo etero e separato in cui albergherebbero delle realtà matematiche in sé ha una pluralità di fonti e di origini. Una di queste è la tendenza dei matematici a formulare ipotesi o congetture riguardo agli oggetti matematici prima di essere riusciti a elaborare una dimostrazione che ne mostri la verità o la falsità. L'esistenza di congetture matematiche quali l'ipotesi di Goldbach, l'ipotesi di Riemann e altre congetture matematiche, sembrano suggerire che per principio debba esistere un fatto nel mondo delle forme in grado di verificarle o falsificarle. Se è possibile dimostrare l'ipotesi di Goldbach, allora il teorema di Goldbach afferma qualcosa di vero riguardo al mondo delle forme, un fatto ideale che riguarda tale mondo. Se invece l'ipotesi di Goldbach dovesse rivelarsi falsa, la dimostrazione della sua impossibilità mostrerà che nel regno delle forme non esiste una simile possibilità. La possibilità diviene così una realtà nel regno delle forme, e la dimostrazione rappresenta solo uno strumento esteriore per attestare e fare esperienza di una realtà indipendente dal nostro pensiero, come se esse fossero esperimenti condotti nel regno delle forme volti a stabilire in un sol colpo le proprietà di questi esotici oggetti. Dimostrare, ad esempio, il teorema di Pitagora significa, secondo questa prospettiva, scoprire che il triangolo rettangolo (o, meglio, tutti i triangoli rettangoli) possiede una certa proprietà che lo distingue dagli altri triangoli. In questo senso, una dimostrazione mostra la realtà di una possibilità: è possibile dimostrare che i triangoli rettangoli possiedono questa proprietà, mentre è possibile dimostrare che tale proprietà non è propria di altri triangoli. Wittgenstein chiama tale rappresentazione dell'opera dei matematici la *concezione telescopica della dimostrazione*:

Forse le cose stanno così: Dio vede che la proposizione è vera, mentre noi possiamo arrivarci in modi diversi; alcuni di noi si convincono più facilmente, altri hanno bisogno di una lunga ed elaborata dimostrazione. Ma è così. Ma qual è il criterio per cui è così, se non appunto la dimostrazione? L'idea sembra essere questa: la verità cui giungiamo è sempre stata lì, indipendentemente dalla dimostrazione. (La dimostrazione come sorta di telescopio)⁷

Ed è proprio contro una simile rappresentazione della natura della dimostrazione matematica che Wittgenstein intende prendere posizione:

⁶ L. Wittgenstein, *Lezioni sopra i fondamenti della matematica*, a cura di Cora Diamond, Bollati Boringhieri, Torino, 2002, pp. 151-152.

⁷ *ivi*. cit. p. 138.

I want to free you from the idea that this figure:  shows something about the essence of a pentagon and a pentagram, that the demonstration is an experiment in another sphere, an experiment at a higher level on a more ethereal object⁸

2. Eidos e convenzione: la generalità della dimostrazione

Sulla base dell'immagine schematica del platonismo che ho appena presentato, passerò ora a considerare la natura della dimostrazione matematica secondo il platonismo e la critica che Wittgenstein muove contro di essa. In particolare, a giudizio di Wittgenstein, la concezione della dimostrazione come esperimento condotto nel regno delle forme esercita un forte fascino, poiché riesce a fornire una risposta efficace a un problema filosofico su cui egli riflette: il problema dell'universalità della dimostrazione⁹.

Di fronte alla tesi secondo cui la matematica è una scienza degli oggetti matematici, e all'invito a concepire le sue dimostrazioni come se fossero esperimenti condotti nel regno delle forme, viene naturale soffermarsi a notare le numerose differenze che distinguono una dimostrazione matematica da un esperimento vero e proprio. Anche adottando un punto di vista platonista, non si può non ammettere che le generalizzazioni proprie della matematica (es. per tutti i triangoli rettangoli vale il teorema di Pitagora), legittimate dalla "scoperta" di certe proprietà delle figure geometriche, ad esempio, avvengano per induzione. Nelle scienze sperimentali, gli esperimenti sono in grado di mostrare una verità generale sulla base del riconoscimento di una regolarità riguardante le istanze empiriche di un certo fenomeno: Galileo ha potuto formulare la legge della caduta dei gravi, asserendo che essi cadono con un'accelerazione di $9,8 \text{ m/s}^2$, poiché ha eseguito numerosi esperimenti e ha notato una regolarità tra lo spazio percorso e il tempo di percorrenza dei corpi studiati. Egli ha cioè

⁸ L. Wittgenstein, *Wittgenstein's Lectures. Cambridge, 1932-1935*, 2001, edito da Alice Ambrose, Prometheus Books, 2001, p. 176.

⁹ In un pregevole articolo, Stillwell sostiene che l'indagine concettuale di Wittgenstein, volta a chiarire la distinzione tra dimostrazione matematica ed esperimento scientifico, possa fornire indicazioni per affrontare il problema uno-molti di greca memoria. Scrive: "I would maintain that the emphasis on clarity in constructions has as its purpose reference to the one-many relationship. I have argued for between proofs and their tokens. Admittedly, however, a great deal more exegetical work needs to be done to settle this issue" in S. Stillwell, "Empirical Inquiry and Proof", in *Proof and Knowledge in Mathematics*, Routledge, 1992. Con il presente contributo mi propongo di dare avvio al lavoro esegetico menzionato da Stillwell.

inferito una proprietà fondamentale dei corpi (della forma pura dei corpi sulla Terra) per induzione dai casi particolari. È chiaro che non è questo che avviene in matematica: la matematica non è una scienza sperimentale che fa esperimenti sulle figure geometriche per stabilire le loro proprietà attraverso una generalizzazione induttiva (il metodo matematico è infatti un metodo deduttivo). Le sue dimostrazioni non sono esperimenti particolari che vengono poi generalizzati: dimostrare il teorema di Pitagora non significa certo scoprire, empiricamente, che esso vale per un triangolo rettangolo particolare o per molti triangoli particolari. La matematica non stabilisce le proprietà generali del triangolo studiando le proprietà dei singoli triangoli e generalizzando poi i risultati a tutti i triangoli, così come avviene in chimica o in fisica.

Ma com'è possibile, allora, che la dimostrazione, concepita come esperimento particolare condotto con una certa figura dimostrativa, riesca a dimostrare qualcosa di universale? È qui che viene in soccorso la concezione telescopica, secondo la quale la figura dimostrativa particolare impiegata per dimostrare il teorema non sarebbe un esperimento empirico, un esperimento singolare che verte su un triangolo particolare, ma piuttosto un esperimento sull'essenza stessa del triangolo: "Direi che nella prova non si fanno semplicemente corrispondere queste figure individuali, ma le stesse forme"¹⁰. In modo tale che, se essa prova qualcosa riguardo alla forma del triangolo, allora tale proprietà deve essere propria di tutti i triangoli. Non è affatto difficile cogliere le assonanze che questa posizione instaura con la visione propria della dottrina platonica delle Idee, secondo cui tutte le cose del nostro mondo sono copie imperfette di realtà ideali che ne fungono da modello¹¹. Il rapporto che intercorre tra le cose del nostro mondo e quelle del mondo superiore è un rapporto di somiglianza o, come diceva Platone, di partecipazione (μέθεξις, methexis), di imitazione (μίμησις, mimesis) e di manifestazione (παρουσία, parousia). Da un punto di vista platonico, infatti, in virtù della μέθεξις tra mondo ideale e mondo sensibile, tutti i triangoli rettangoli empirici devono anch'essi possedere la proprietà che la dimostrazione matematica ha messo in luce in riferimento all'idea di triangolo, al triangolo in sé. Questo andamento di pensiero è ben presentato in un passo del *Fedone* di Platone, in cui gli interlocutori, parlando delle Idee del pari e del dispari – idee distinte ma connesse – sostengono che, una volta stabilito, per via noetica, che l'idea del dispari partecipa dell'idea del tre, si è con ciò stesso scoperto che ogniqualevolta si dispone di qualcosa che è definibile con il predicato "tre", esso deve necessariamente essere anche dispari. Scrive Platone:

¹⁰ L. Wittgenstein, *Osservazioni sopra i fondamenti della matematica*, Einaudi, Torino, 1988, p. 23.

¹¹ cfr. P. Spinicci, *Lezioni sulle Ricerche filosofiche di Wittgenstein*, CUEM, Milano, 2012.

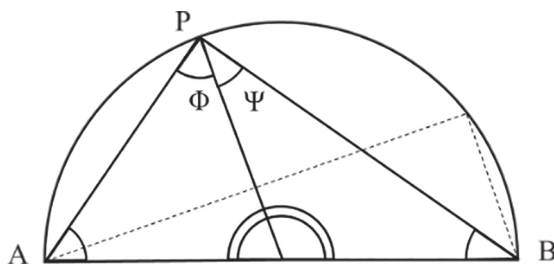
Il dispari ha diritto d'aver sempre questo nome di dispari che gli diamo ora, o no? – Senza dubbio. – Ed esso solo di tutte le cose che esistono – perché questo è il problema che io pongo - oppure anche qualche cos'altro [104a] che non è propriamente lo stesso che il dispari, e tuttavia bisogna chiamarlo, oltre che col suo proprio nome, anche con questo di dispari, perché è di tale natura che dal dispari non si scompagna mai? Intendo dire con ciò quel che può capitare, per esempio, al tre e ad altre cose molte. Vedi il caso del tre. Non ti pare che il tre abbia da esser chiamato sempre, oltre che col suo proprio nome di tre, anche con quello di dispari, sebbene non siano la stessa cosa il dispari e il tre? Eppure sono di tal natura e il tre e il cinque e insomma tutta la metà della serie dei numeri, che, pur non essendo ciascuno di essi lo stesso che il dispari, sempre tuttavia ciascuno di essi è dispari [...] Come dicevamo poco fa. Tu di certo sai bene che qualunque cosa l'idea del tre riesca ad occupare, è inevitabile che non sia solo tre ma anche dispari¹²

Tale aspetto è giustificato appunto dalla metessi: se le cose del nostro mondo possiedono proprietà in virtù della partecipazione alle forme pure, e se le forme pure intrattengono relazioni tra loro, ne consegue che anche le forme particolari devono possedere relazioni analoghe, poiché le relazioni tra le Idee devono rispecchiarsi e manifestarsi anche sul piano delle forme sensibili, che imitano le Idee. La scoperta delle proprietà delle forme pure si traduce immediatamente nella conoscenza della natura e delle proprietà delle forme particolari, e in questo modo si può giustificare perché da una singola dimostrazione si riesca a dimostrare qualcosa di universale.

Ma è proprio qui che si inserisce la critica di Wittgenstein. Chiediamoci infatti: fino a che punto questa analogia è percorribile? Se la matematica è concepita come scienza delle forme pure, come è possibile stabilire le proprietà di tali forme, se tuttavia queste non sono direttamente accessibili? In fondo, le forme che abbiamo a disposizione sono sempre forme empiriche e particolari, e non ha senso affermare che in una dimostrazione matematica venga effettivamente presa in causa o utilizzata la forma pura. Inoltre, è importante notare che se un triangolo rettangolo non dovesse godere della proprietà che il teorema di Pitagora gli attribuisce, un tale caso particolare non sarebbe considerato un controesempio che falsifica il teorema, ma piuttosto come la prova del fatto che qualcosa è andato storto nel momento della misurazione (per un errore di calcolo, oppure perché il triangolo non è perfettamente rettangolo), e dunque che il triangolo particolare in questione non era realmente rettangolo. Nelle considerazioni che seguiranno, cercherò di spiegare in che modo Wittgenstein cerca di rendere conto dell'universalità della dimostrazione senza fare appello a forme pure e universali che le cose del nostro mondo imitano. Prendiamo il caso della

¹² Platone, *Fedone*, 104a-104d.

dimostrazione, che Wittgenstein chiama “teorema di Talete”, che afferma che un triangolo inscritto in una semicirconferenza è sempre rettangolo. Riproduco qui una versione leggermente diversa ma essenzialmente identica della dimostrazione di Wittgenstein:



$\Phi = A$, perché AOP è, per costruzione, un triangolo isoscele con $PO = AO$ – e in un triangolo isoscele gli angoli opposti ai cateti equivalenti sono equivalenti;

$\Psi = B$ per la stessa ragione ma riferita a OB e OP;

Dato che $\Phi = A$ e $\Psi = B$ segue che $\Phi + \Psi = \frac{1}{2}(\Phi + \Psi + A + B)$;

Ma dato che in un triangolo qualsiasi la somma degli angoli interni è 180° , e che $(\Phi + \Psi + A + B)$ è la somma degli angoli interni del triangolo ABP, ne segue che $\Phi + \Psi = \frac{1}{2}180^\circ$ e dunque che l'angolo APB ($\Phi + \Psi$) = 90° . C.V.D.

Secondo la concezione platonista, tale dimostrazione prova che i triangoli inscritti in una semicirconferenza sono rettangoli. A proposito di questo teorema, Wittgenstein si chiede: com'è possibile che esso valga per tutti i triangoli inscritti in una circonferenza? In che modo si può passare dal triangolo rappresentato in figura a tutti i triangoli inscritti in una circonferenza? Scrive Wittgenstein:

Universalità della dimostrazione euclidea. Si dice che il procedimento dimostrativo è condotto su di un solo triangolo, ma che la dimostrazione è valida per tutti i triangoli – o per ogni triangolo arbitrario. Prima di *tutto* è curioso che quello che vale per un triangolo debba perciò stesso valere per ogni altro. Non sarebbe possibile che un medico visitasse un individuo e poi concludesse che quanto ha constatato in lui debba per forza valere per tutti. E se ora misuro gli angoli di un triangolo e sommo i risultati, non posso realmente inferire che la somma degli angoli sarà uguale per ogni altro triangolo. È chiaro che la dimostrazione non può affatto parlare di una totalità di triangoli. Una dimostrazione non può andare oltre sé stessa¹³

¹³ L. Wittgenstein, *Osservazioni filosofiche*, Einaudi, Torino, 1976, p. 111.

Ciò su cui Wittgenstein vuole attirare l'attenzione è proprio la particolarità della figura dimostrativa: non c'è dubbio che si possa concepire la dimostrazione come un esperimento, ma in tal caso bisogna ammettere che, in quanto esperimento, essa riguarda esclusivamente il triangolo preso in esame, quello che compare nella dimostrazione stessa. In questo modo, la dimostrazione può essere vista come un metodo per stabilire le proprietà del singolo triangolo rappresentato. Scrive Wittgenstein:

Immagina che si dica: congiungendo 3 lati di un poligono per mezzo di una diagonale rendiamo manifeste le sue proprietà. Esso si rivela, allora, come un poligono di 24 lati. Voglio dire che ho reso manifesta una proprietà del poligono di 24 lati? No. Voglio dire che ho reso manifesta una proprietà di questo poligono disegnato qui. Ora so che qui c'è un poligono di 24 lati. È un esperimento, questo? Per esempio mi mostra che genere di poligono c'è qui. Quello che ho fatto si può chiamare un esperimento di computo¹⁴

Il problema di fondo, secondo Wittgenstein, è che concepire la dimostrazione come esperimento non consente di spiegarne l'universalità. Infatti, se la si considera in questi termini, l'immagine della prova non parla (e non può parlare) di una totalità di triangoli, ma solo del triangolo particolare su cui si concentra. La dimostrazione è, in effetti, solo un'immagine, e in essa non si fa menzione di una totalità di triangoli; per questo, a rigore, se viene concepita come esperimento, essa può fornire informazioni solo sulle proprietà del triangolo che rappresenta, e non di tutti gli altri. Se si vuole considerare la dimostrazione come un esperimento, cioè come una procedura che rivela le proprietà della figura che la compone, allora sembra che essa non possa andare oltre sé stessa. In questo senso, la dimostrazione sarebbe un "esperimento di computo", un metodo per stabilire le proprietà del triangolo presente in essa.

Ma allora, com'è possibile che una dimostrazione, che appare qualcosa di particolare e riferito a un certo triangolo, possa valere per l'intera totalità dei triangoli? Secondo Wittgenstein, la soluzione a questa difficoltà, senza ricorrere all'idea di un esperimento condotto nel regno delle forme, consiste nel riconoscere che la dimostrazione non è affatto un esperimento che rivela le proprietà della figura che la compone, ma piuttosto un *paradigma che definisce un nuovo criterio* per stabilire se un certo triangolo è un triangolo rettangolo, e dunque una nuova regola per l'applicazione del concetto di "triangolo rettangolo" all'esperienza¹⁵. La

¹⁴ L. Wittgenstein, *Osservazioni sopra i fondamenti della matematica*, p. 34.

¹⁵ Riguardo alle analisi di Wittgenstein sulla distinzione concettuale tra esperimento scientifico e dimostrazione matematica, si consigliano i seguenti lavori: S. Schroeder, Wittgenstein on Mathematics, Routledge, 2021, §§ 9-10; M. Steiner, "Empirical Regularities in

dimostrazione non sarebbe quindi un esperimento condotto su un triangolo particolare che rivela una verità generale riguardante tutti i triangoli, ma un'immagine in cui viene messa in luce una connessione interna tra delle strutture particolari, che noi impieghiamo ed eleviamo al rango di modello per definire cosa si debba intendere con il concetto di "triangolo rettangolo". Il triangolo che compone la figura, e a cui è attribuita la proprietà enunciata dal teorema di Pitagora, viene così utilizzato come paradigma, ovvero come termine di paragone con cui confrontiamo altre figure particolari per stabilire se esse siano o meno triangoli rettangoli:

La prova non indaga l'essenza delle figure, ma esprime quello che, d'ora in poi, dovrò considerare come appartenente alla loro essenza. Ciò che appartiene all'essenza lo relego tra i paradigmi del linguaggio. Il matematico produce essenza¹⁶

La prova è il nostro modello di un determinato risultato, che ci serve come termine di paragone (unità di misura) per le variazioni che hanno luogo nella realtà¹⁷

Il teorema non afferma che tutti i triangoli possiedono una certa proprietà, ma attraverso di esso si stabilisce che il possedere quella proprietà – quella esemplificata dalla dimostrazione – diventi un nuovo criterio per stabilire se una figura sia un triangolo rettangolo. La generalità della dimostrazione, quindi, non consiste nella generalizzazione a partire dal caso particolare che viene mostrato, ma nell'applicazione di quel modello come regola per determinare cosa sia e cosa non sia un triangolo rettangolo. La dimostrazione ci offre un nuovo criterio grazie al quale possiamo valutare e decidere se le figure che incontriamo nell'esperienza siano o meno triangoli rettangoli: una volta costruito questo paradigma, diremo che un triangolo è rettangolo se e solo se è inscritto in una semicirconferenza, e non più semplicemente perché il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti, oppure perché possiede un angolo di 90°. Secondo Wittgenstein, dunque, i teoremi matematici non sono proposizioni vere che descrivono una realtà eterea e separata da quella empirica – astratte e universali – ma *proposizioni grammaticali*, cioè espressioni che ri-definiscono, ampliano e istituiscono il significato dei termini che le compongono. Questo significato viene fissato tramite la dimostrazione, che ci fornisce un modello che funge da criterio per stabilire se un certo oggetto possiede o meno una proprietà, offrendoci così una regola di inferenza per "misurare" (determinare) la natura degli oggetti dell'esperienza. Scrive Wittgenstein:

Wittgenstein's Philosophy of Mathematics", in *Philosophia Mathematica*, 2009; P. Frascolla, "Wittgenstein on Mathematical Proof", in *Wittgenstein Today*, Il Poligrafo, 2004;

¹⁶ L. Wittgenstein, *Osservazioni sopra i fondamenti della matematica*, p. 19.

¹⁷ *ivi*, p. 101.

Dalla dimostrazione del caso particolare (comunque fosse intesa) vedo effettivamente tutto quello di cui ho bisogno in logica. Cioè, la dimostrazione consegue la propria generalità non perché sia intesa in un certo modo, ma perché dimostra effettivamente in generale (cioè in maniera universalmente valida). Ossia, qui la generalità consiste nella generalità dell'applicazione. E questa, per così dire, esiste, che lo si voglia o no, semplicemente in virtù della relazione interna tra il caso singolo e il paradigma. - Allora si potrebbe dire che una dimostrazione dimostra tanto universalmente quanto è applicabile. Ossia, dimostra universalmente mediante lo spazio in cui si trova [...]

Non c'è nulla di generale nella dimostrazione. Essa è interamente particolare, ma la sua possibilità di applicazione contiene la generalità/è universale [...]

La possibilità di applicazione si irradia attraverso lo spazio e colpisce il corpo che introduciamo in questo spazio. I raggi luminosi si potrebbero dire universali, perché illuminano qualunque corpo si metta sulla loro strada. Ma dire universale la sorgente luminosa sarebbe assurdo[...] La generalità della dimostrazione è soltanto lo spazio che circonda questa dimostrazione. L'applicazione a un caso particolare è un nuovo corpo in questo spazio¹⁸

La dimostrazione, come immagine particolare, riceve la sua generalità dall'uso che ne facciamo. Essa vale in modo generale nella misura in cui la nuova regola grammaticale può essere agevolmente applicata, ripetutamente e regolarmente, alla realtà. La generalità propria della dimostrazione è dunque una generalità dell'applicazione: è generale in quanto può essere applicata continuamente e diffusamente nella nostra vita quotidiana, poiché facciamo esperienza costante delle condizioni che rendono agevole l'uso di questa regola grammaticale.

Tuttavia, se così stanno le cose, ciò non implica che per fare matematica basti elevare a paradigma un esempio particolare di triangolo. Infatti, se costruiamo un triangolo rettangolo particolare e i quadrati costruiti sui suoi lati, constatando che per essi vale il teorema di Pitagora, ciò non significherebbe aver dimostrato universalmente il teorema. Questo perché l'uso di una tale immagine come paradigma per misurare l'esperienza non sarebbe affatto sufficiente; anzi, in alcuni casi non sapremmo nemmeno come applicare questo paradigma, poiché mancherebbe un metodo di controllo.

Per rispondere a questa obiezione è importante sottolineare che, nella dimostrazione, a fungere da paradigmi non sono semplicemente le immagini particolari. Ciò che conta non è l'immagine particolare in sé, la quale assume valore dimostrativo solo perché costruita secondo una certa regola, bensì la regola stessa in base alla quale una certa immagine particolare è stata costruita. In una dimostrazione dunque, varie immagini-regole vengono messe in connessione tra loro attraverso operazioni, rappresen-

¹⁸ L. Wittgenstein, *The Big Typescript*, Einaudi, Torino, 2002, pp. 761-763.

tate anch'esse da regole, al fine di mettere in luce relazioni strutturali tra le forme (ovvero tra le regole), e non relazioni empiriche e accidentali. Non è dunque l'immagine particolare del triangolo a fungere da paradigma, ma la regola a partire dalle quali tale immagine particolare è stata costruita; analogamente, nell'immagine della dimostrazione non viene esibita un'operazione particolare, poiché quest'ultima funge piuttosto da paradigma del *tipo* di operazione¹⁹ (della regola, della procedura) che connette le strutture costitutive della prova:

Il fatto è che non si tratta dei segni di matita sulla carta [...] poiché il disegno costituisce un simbolismo, vale a dire che noi operiamo in base a certe regole con le linee e i punti tracciati con la matita, e l'essenziale consiste nelle regole e non nelle linee. Si potrebbe anche dire che le linee in questo caso non sono intese come linee, come pezzo di realtà, ma come una figura del gioco che sottostà a certe regole da noi stabilite. La dimostrazione quindi non tratta della figura disegnata. [...] Delle due l'una: o con l'esempio intendo l'esempio e nient'altro oppure vedo (proietto) la generalità già nell'esempio che è allora espressione della generalità. Questo è il nostro caso perché la generalità sta nelle regole stabilite prima dell'inizio del gioco, prima cioè che si dimostri qualcosa, e in queste regole i punti, le rette ecc. figurano come variabili²⁰

In sintesi, la dimostrazione è l'immagine paradigmatica di un'operazione che mostra una connessione formale tra due strutture o configurazioni, e ciò che viene messo in relazione non è tanto l'immagine particolare (il triangolo) con altre figure (come i quadrati costruiti sui lati), ma le regole per la costruzione di queste immagini e per l'istituzione delle loro connessioni reciproche:

La prova fa sì che da una struttura ne sorga un'altra. Esibisce il sorgere di una struttura dall'altra.²¹

Un gruppo di regole (configurazioni) ha relazioni interne analoghe all'altro gruppo di regole (configurazioni). La dimostrazione mostra questo e nient'altro²²

La relazione interna è l'operazione che produce una struttura dall'altra, considerata equivalente all'immagine di questo stesso passaggio – così che il passaggio conforme a questa successione di immagini è, *eo ipso*, un passaggio conforme a quelle regole di operazione²³

¹⁹ Nel suo articolo (Stilwell, 1992), Stilwell difende la tesi secondo cui che a giudizio di Wittgenstein una dimostrazione matematica è l'esibizione di una *type-construction*.

²⁰ L. Wittgenstein, *Colloqui al "Circolo di Vienna"*, Mimesis, Milano – Udine, 2011, pp. 193-194.

²¹ Ivi p. 104.

²² L. Wittgenstein, *Colloqui al "Circolo di Vienna"*, p. 136.

²³ L. Wittgenstein, *Osservazioni sopra i fondamenti della matematica*, p. 256.

Ciò che conferisce al teorema la sua universalità e necessità non risiede nel fatto che la dimostrazione riguardi figure particolari, ma nel fatto che essa esemplifica regole di costruzione di immagini e di operazioni (universalità) che siamo noi stessi a stabilire e adottare (necessità).

3. Idea e segno linguistico: genealogia delle forme pure

Ho illustrato dunque in che modo Wittgenstein sfugga al problema dell'universalità della dimostrazione: cessando di concepire la dimostrazione come un esperimento, riconoscendola invece come un modello da applicare generalmente, e considerando il teorema non come una proposizione vera in senso assoluto, ma come una regola da applicare universalmente, la generalità della dimostrazione si rivela essere una generalità di tipo applicativo. Un teorema è generale perché viene applicato generalmente, in modo continuo.

Alla luce di queste considerazioni, il mio intento finale sarà quello di chiarire quali critiche Wittgenstein muove direttamente nei suoi testi contro la concezione platonica in quanto tale. Cercherò cioè di mettere in discussione l'idea che esistano forme pure su cui tutto il nostro linguaggio è modellato, mostrando qual è la genesi di quest'idea e in che modo essa possa perdere la sua apparente plausibilità. Per farlo, sarà necessario spiegare in che senso, per Wittgenstein, le forme pure non siano altro che distillati di grammatica, il frutto di una fede superstiziosa nell'esistenza di un corpo di significato nascosto dietro ai nostri concetti e che giustificherebbe le nostre dimostrazioni. Le forme pure sono, secondo Wittgenstein, un miraggio grammaticale, un ologramma concettuale creato dalla confusione derivante dalla scarsa chiarezza del nostro linguaggio:

In actual fact the philosopher wishes to do something similar: he wishes to get behind grammar, to arrive as it were at the proto-meaning, the idea, that stands \hovers\ behind it all. The idea is nothing other than the meaning-body from which the rules of grammar are supposed to flow.²⁴

Per comprendere che tipo di miraggio siano le forme pure, è necessario analizzarne la genesi. Secondo Wittgenstein, ciò che ci spinge a sentire l'esigenza di postulare l'esistenza di Idee in senso platonico ha essenzialmente tre fonti, tra loro strettamente interconnesse. La prima, risiede nell'uso di una forma primitiva di descrizione della grammatica del nostro linguaggio, che ci induce a concepire le proprietà come ele-

²⁴ L. Wittgenstein, F. Waisman, *The Voices of Wittgenstein. The Vienna Circle*, Routledge, 2003, p. 483.

menti (ingredienti) costitutivi delle cose. Questo modo di rappresentare le proprietà apre la strada alla possibilità di immaginarle nella loro forma pura, distillata e separata dalla mescolanza concreta delle cose. Non a caso, proprio in questo contesto Wittgenstein cita esplicitamente Platone:

Noi propendiamo a pensare che debba esserci qualcosa di comune a tutti i giochi, ad esempio, e che questa proprietà comune giustifichi l'applicazione del termine generale "gioco" a tutti i giochi [...] L'idea d'un concetto generale che sia una proprietà comune ai suoi casi particolari è connessa con altre idee (primitive e semplicistiche) sulla struttura del linguaggio. Essa si può paragonare all'idea che le proprietà siano ingredienti delle cose che hanno quelle proprietà: ad esempio, che la bellezza sia un ingrediente di tutte le cose belle come l'alcool lo è della birra o del vino, e che, quindi, sia possibile avere la bellezza allo statu puro, non adulterata da qualcosa di bello²⁵

Cacciata della morte o uccisione della morte; ma d'altra parte viene raffigurata come uno scheletro, dunque in un certo senso come se essa stessa fosse morta. "As dead as death". "Nulla è così morto come la morte; nulla è così bello come la bellezza stessa!". L'immagine con la quale qui ci si fa un'idea della realtà, per cui la bellezza, la morte ecc. sono le sostanze pure (concentrate), essendo presenti in un oggetto bello come se fosse una mistura. - E qui non riconosco forse le mie riflessioni su "oggetto" e "complesso"? (Platone)²⁶

In secondo luogo, l'idea di una forma pura, che le forme particolari devono o possono imitare, e a cui tendono a coincidere, deriva dalla nostra tendenza ad auto-predicare il paradigma di un certo concetto con la proprietà (predicato) che esso stesso definisce. A differenza di quanto sostenuto nel *Tractatus* infatti, in cui Wittgenstein radicava la significatività del linguaggio negli oggetti – della cui esistenza necessaria bisognava convincersi sulla base di ragioni puramente logiche, senza preoccuparsi dell'impossibilità di individuarne concretamente delle esemplificazioni –, a partire dalla cosiddetta "seconda fase" del suo pensiero, Wittgenstein pone la significatività del linguaggio in un sistema di esempi, campioni o paradigmi *concreti*, tratti dall'esperienza quotidiana²⁷, e non appunto entità simil-platoniche pure e inaccessibili. Proprio *questi particolari* sono impiegati come paradigmi, e la loro generalità risiede nel fatto di essersi rivelati utili ed efficaci nella quotidiana prassi di descrizione del mondo. Ora, se un paradigma definisce il significato di un concetto, ne consegue che è logicamente esclusa la possibilità di applicare, a fini descrittivi, quel concetto al paradigma che

²⁵ L. Wittgenstein, *Libro blu e Libro marrone*, Einaudi, Torino, 2000, p. 26.

²⁶ L. Wittgenstein, *The Big Typescript*, p. 431.

²⁷ Cfr. L. Wittgenstein, *Ricerche filosofiche*, Einaudi, Torino, §§57-59;

lo definisce, ovvero auto-predicarlo. Attribuire al paradigma la proprietà che esso stesso deve definire conduce a un giudizio tautologico, che si limita ad affermare che una cosa è identica a sé stessa. Un esempio emblematico di questo argomento riguarda il metro campione di Parigi. Nelle *Ricerche filosofiche*, Wittgenstein sostiene che non ha senso affermare che il metro campione a Parigi è lungo un metro, perché ciò equivale semplicemente a dire che l'unità di misura della lunghezza è lunga quanto sé stessa. Ma la cosa più importante è che auto-predicando il paradigma della proprietà che esso stesso definisce, si genera uno scarto tra la forma particolare, che funge da soggetto del giudizio, e la forma universale, intesa come predicato, che però è a sua volta definita unicamente dall'uso paradigmatico di una certa figura particolare (il campione paradigmatico)²⁸. In questo modo, si tende a considerare la figura particolare che compone la dimostrazione – e che svolge il ruolo di paradigma – come mera *portatrice* delle proprietà pure evidenziate dalla dimostrazione, la quale conseguentemente sembra vertere sulle forme pure. Di conseguenza, si è indotti a credere che la figura nella dimostrazione – che possiede una certa forma anziché essere la figura che definisce quella forma –, sia semplicemente un'istanza particolare della forma in sé, riconfermando così lo scarto tra la forma possibile pura e la forma reale possibile:

Quando si dice: “Questa forma consiste di queste altre forme” si pensa alla forma come a un sottile disegno, a una sottile intelaiatura che ha questa forma, e sulla quale vengono, per così dire, modellate le cose che hanno questa forma. (Confronta: la concezione platonica delle proprietà come ingredienti di una cosa). “Questa forma consiste di queste forme. Mi hai mostrato una proprietà essenziale di questa forma”. – Mi hai mostrato una nuova immagine. È come se Dio l'avesse costruita così. – Qui dunque ci serviamo di una similitudine. La forma diventa un'entità eterea che ha questa forma: è come se fosse stata fatta così una volta per tutte (da colui che ha messo nelle cose le proprietà essenziali). Perché, se la forma diventa una cosa che consta di parti, allora l'artefice della forma è colui che ha anche fatto luce e oscurità, colore e durezza, eccetera. (Immagina che qualcuno ti chieda: la forma ... è costituita di queste parti. Chi l'ha fatta? Tu?) [...] E voglio dire: quando si usa l'espressione: “La prova mi ha insegnato – mi ha convinto – che le cose stanno così”, si rimane ancor sempre in una metafora²⁹

²⁸ cfr. L. Wittgenstein, *Causa ed effetto*, Einaudi, 2006, pp. 47-51; in questi appunti delle lezioni di Wittgenstein annotati da Rush Rees, Wittgenstein sostiene esplicitamente che, in questa situazione, un certo campione viene impiegato sia come paradigma per definire un concetto, sia come oggetto di predicazione del concetto appena definito.

²⁹ L. Wittgenstein, *Osservazioni sopra i fondamenti della matematica*, pp. 31-32.

Abbagliati da questo modo di pensare, la dimostrazione finisce per configurarsi come un esperimento che mette in luce le proprietà essenziali delle forme pure tramite forme particolari che le istanziano. Ma alla base di questa tentazione vi è la dimenticanza che sono le forme particolari a costituire i paradigmi attraverso cui “abbiamo accesso” alle forme pure. Non esiste infatti altro modo per indicare le presunte forme pure se non appellandosi a figure particolari:

Se la configurazione del gruppo era la stessa, allora non può non avere gli stessi aspetti, le stesse possibilità di divisione. Se ne ha altri, allora non è la medesima configurazione; forse allora ha fatto, in qualche modo, la medesima impressione su di te; ma è la medesima configurazione solo se puoi dividerla nel medesimo modo”. È come se questo esprimesse l'essenza della configurazione³⁰

Ed è proprio a questo punto che Wittgenstein propone una soluzione:

Così, quando dico: “È come se questa proposizione esprimesse l'essenza della configurazione” – intendo: è come se questa proposizione esprimesse una proprietà dell'entità configurazione. E si può dire: “L'entità, di cui la proposizione asserisce una proprietà, e che qui chiamiamo l'entità ‘configurazione’ è l'immagine che non posso fare a meno di formarmi dinanzi alla parola ‘configurazione’³¹

Dire che l'entità di cui la proposizione asserisce una proprietà altro non è che “l'immagine che non posso fare a meno di formarmi dinanzi alla parola” significa innanzitutto sottolineare che non esiste una configurazione generale accessibile in sé, ma solo una molteplice ripetizione di configurazioni particolari, tra loro identiche. Non c'è quindi motivo di ipostatizzare un ologramma di una forma pura dietro l'idea di triangolo, poiché il concetto di triangolo è definito a partire dai triangoli particolari.

In secondo luogo, con quest'osservazione Wittgenstein indica che il segno linguistico gioca un ruolo cruciale nella genesi dell'idea dogmatica del significato. Emerge così la terza fonte da cui origina l'idea delle forme pure. Wittgenstein ci invita infatti a riconoscere che la forma pura altro non è che il riflesso della generalità insita nel concetto stesso, inteso come segno linguistico. Questa generalità – che è una generalità dell'applicazione, che dipende cioè da quanto generalmente il concetto risulta applicabile – viene reificata nell'immagine di un oggetto puro, una forma pura, a cui sembra che le cose tendano ad assomigliare. Wittgenstein

³⁰ *Ibid.*

³¹ *Ibid.*

spiega questo aspetto molto chiaramente in un paragrafo delle *Ricerche filosofiche*:

Se mi mostrano differenti foglie e mi dicono: “Questo si chiama ‘foglia’”, io acquisisco, nella mia mente, un concetto della forma di foglia, un’immagine di essa. – Ma allora, che aspetto ha l’immagine di una foglia che non mostri una forma determinata ma ‘ciò che è comune a tutte le forme di foglia’? Che tonalità cromatica ha ‘il campione di colore conservato nella mia mente’ del colore verde? – Il campione di ciò che è comune a tutte le tonalità di verde? “Ma non potrebbe esserci un simile campione ‘generale’? Per esempio, uno schema di foglia o un campione di verde puro?” – Certo! Ma che questo schema venga inteso come schema e non come la forma di una determinata foglia, e che una tavoletta di verde puro venga intesa come campione di tutto ciò che è verde e non come campione del verde puro – ciò risiede a sua volta nel modo di applicazione di questo campione³²

Un simile campione generale e puro della foglia non può esistere, né vi è bisogno di appellarsi ad esso per giustificare la generalità delle nostre asserzioni. Questa generalità, infatti, deriva dall’impiego continuo di un esempio come paradigma di un concetto. È proprio l’uso prolungato, nel tempo e nello spazio, di tale paradigma a conferire generalità al concetto. L’Idea della forma pura altro non è che la ipostatizzazione di questa generalità nell’immagine di una forma pura distinta dalle forme reali. Una reificazione che si realizza in virtù della convinzione che la forma di una certa figura geometrica sia qualcosa di distinguibile e *separabile* da una delle tante figure geometriche di quella forma. Questo apparente iato tra forma pura e forma particolare è in realtà un miraggio grammaticale che nasce dal fatto che, nel nostro linguaggio, oltre alle figure geometriche particolari che incarnano una certa forma e che possono essere usate come esempi paradigmatici per rappresentarla, *possediamo anche un segno linguistico che svolge lo stesso ruolo paradigmatico*. Possediamo cioè un paradigma linguistico (un concetto) che si riferisce simbolicamente, anziché in modo iconico-esemplificativo, alle figure particolari che possiedono una certa forma. In questo modo, a causa dell’assenza di un’esemplificazione reale del concetto, si genera l’apparente esigenza di giustificare la generalità del segno linguistico attraverso il riferimento a un oggetto puro e generale in sé. Prendiamo il caso della foglia: la parola “foglia” non è certo una foglia particolare, eppure essa possiede una generalità applicativa. Con la parola “foglia” possiamo infatti riferir-

³² L. Wittgenstein, *Ricerche filosofiche*, pp. 43-44.

ci a tutte le foglie, non perché essa sia il nome di una forma pura, ma perché viene generalmente e abitualmente utilizzata per indicare ciò che comunemente chiamiamo “foglia”. Parlare della forma pura della foglia significa reificare questa generalità del segno linguistico nell’immagine di un’oggetto puro a cui la parola “foglia” dovrebbe riferirsi, indotti dal desiderio di colmare l’assenza di un riferimento immediato del segno linguistico alla forma esperita che esso simboleggia. Wittgenstein commenta infatti così l’ipotesi platonista secondo cui la dimostrazione mette in connessione le forme stesse:

Direi che nella prova non si fanno semplicemente corrispondere queste figure individuali, ma le stesse forme: ma certo questo vuol dire soltanto che le forme in parola mi sono rimaste bene impresse, e mi sono rimaste impresse come paradigmi³³

È infatti proprio puntando il dito sulla connessione tra paradigmi e nomi, e dunque sul conseguente trasferimento della funzione paradigmatica dai campioni ai segni linguistici, che Wittgenstein scorge l’origine delle forme pure:

Di dove proviene la sensazione che “Il bianco è più chiaro del nero” asserisca qualcosa sull’essenza di questi due colori? Ma la domanda è formulata in modo veramente corretto? Perché, che cosa intendiamo con l’essenza del bianco e del nero? Forse pensiamo all’interno, alla costituzione, ma certamente una cosa del genere non dà senso, qui. Per esempio, diciamo che: “È proprio del bianco l’esser più chiaro...”. Non accade piuttosto che l’immagine di una macchia nera e di una bianca



ci servono come paradigma di ciò che intendiamo con “più chiaro” e “più scuro” e, contemporaneamente, come paradigma di “bianco” e di “nero”? Ora, in tanto l’essere scuro ‘è proprio del’ nero, in quanto, entrambi, sono rappresentati da questa macchia. È scuro per il fatto che è nero. – Ma, per dirla più correttamente: si chiama “nero”, e perciò, nel nostro linguaggio, anche “scuro”. La connessione in parola – che è una connessione tra paradigmi e nomi – viene stabilita nel nostro linguaggio. E la nostra proposizione è atemporale perché asserisce soltanto la connessione tra le parole “bianco”, “nero”, “più chiaro” e un paradigma³⁴

³³ L. Wittgenstein, *Osservazioni sopra i fondamenti della matematica*, p. 23.

³⁴ ivi. pp. 42-43.

Riconoscendo questo processo di trasferimento e traduzione della funzione paradigmatica dal campione al segno linguistico, Wittgenstein riesce a neutralizzare la tentazione del filosofo platonico di rivendicare almeno il diritto di puntare il dito verso le forme pure.

Alla luce del percorso che ho cercato di delineare, dovrebbe essere chiaro a questo punto in che senso la filosofia della matematica di Wittgenstein e la sua analisi del problema dell'universalità della dimostrazione possano offrire un percorso teoretico che consente di formulare critiche radicali all'idea che sta a fondamento del platonismo: l'esistenza di forme pure poste a garanzia e fondamento della validità delle nostre dimostrazioni. La cosiddetta "realtà matematica" non va cercata in un dominio ontologico separato, ma nell'intreccio tra regole grammaticali, pratiche dimostrative e uso paradigmatico delle figure particolari. L'introduzione di un segno linguistico generale che viene elevato a rango di paradigma per una certa forma empirica, a causa dell'assenza di una relazione iconica con le figure particolari che esso rappresenta, genera uno stacco grammaticale illusorio che ci induce a credere *nella separabilità ontologica tra le figure particolari che possiedono una certa forma e la forma di quelle figure particolari*. È precisamente nel tentativo di colmare questo scarto che si origina l'immagine platonica di un dominio ideale, al tempo stesso rassicurante e normativo, che si pretende preceda e fondi le nostre pratiche: un'immagine potente, ma che, secondo Wittgenstein, nasce da un fraintendimento. Nello iato così costituito, in questa fessura aperta da tale inghippo grammaticale, si apre lo spazio per la proiezione olografica della pura forma. Per colmare l'assenza di un riferimento diretto alle forme esperienziali, la forma delle figure viene pensata nella sua purezza e su di essa viene proiettata la generalità applicativa del segno linguistico. Il platonismo, in questa prospettiva, appare come una costruzione concettuale derivata, un effetto retrospettivo prodotto dall'intersezione tra le nostre pratiche linguistiche e operative, più che la scoperta di una realtà ontologica autonoma. Questa è la genesi dell'idea – o meglio, del miraggio – di un *eidos* matematico che funge da correlato puro dei nostri concetti generali e che dovrebbe costituire il fondamento tanto della grammatica quanto dell'essere. In questo senso, le analisi di Wittgenstein forniscono strumenti concettuali per una vera e propria "decostruzione" del platonismo matematico: esse non confutano il platonismo sul piano teorico, ma ne mostrano le radici linguistiche e grammaticali, dissolvendone l'apparente necessità.

Bibliografia

- Floyd J., *Wittgenstein's philosophy of mathematics*, Cambridge University Press, 2021;
- Frascolla P., *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, Routledge, 1994;
- Frascolla P., "Wittgenstein on Mathematical Proof", in *Wittgenstein Today*, Il Poligrafo, 2004;
- Hardy G.H., *Mathematical Proof*, in *Mind*, New Series, 1929;
- Hardy G. H., *Apologia di un matematico*, Garzanti, 2002;
- Hellman G., Shapiro S., *Mathematical Structuralism*, Cambridge University Press, 2018;
- Landry E., *Plato Was Not a Mathematical Platonist*, Cambridge University Press, 2023;
- Linnebo Ø., *Platonism in the Philosophy of Mathematics*, in: Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2024;
- Panza M., Sereni A., *Plato's Problem: An Introduction to Mathematical Platonism*, Palgrave Macmillan, 2013;
- Platone, *Tutti gli scritti*, Fedone, Bompiani, 2018;
- Plebani M., *Reconsidering Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, Tesi di dottorato, Università Ca' Foscari di Venezia, <https://iris.unive.it/retrieve/68c05019-34db-4663-b161-42f1954a4164/IOSONOLATESI.pdf>, 2010;
- Schroeder S., *Wittgenstein on Mathematics*, Routledge, 2021;
- Shanker S., *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics*, State University of New York Press, 1987;
- Shapiro S., *Thinking About Mathematics*, Oxford University Press, 2000;
- Spinicci P., *Lezioni sulle Ricerche filosofiche di Wittgenstein*, CUEM, Milano, 2012;
- Steiner M., "Empirical Regularities in Wittgenstein's Philosophy of Mathematics", in *Philosophia Mathematica*, 2009;
- Stillwell S., "Empirical Inquiry and Proof", in *Proof and Knowledge in Mathematics*, Routledge, 1992;
- Wittgenstein L., *Osservazioni filosofiche*, Einaudi, Torino, 1976;
- Wittgenstein L., *Osservazioni sopra i fondamenti della matematica* (1956), Einaudi, Torino, 1988;
- Wittgenstein L., *Libro blu e Libro marrone*, Einaudi, Torino, 2000;
- Wittgenstein L., *Wittgenstein's Lectures. Cambridge, 1932-1935*, edited by Alice Ambrose, Prometheus Books, 2001;
- Wittgenstein L., *Lezioni sopra i fondamenti della matematica*, a cura di Cora Diamond, Bollati Boringhieri, Torino, 2002;
- Wittgenstein L., *The Big Typescript*, Einaudi, Torino, 2002;
- Wittgenstein L., Waisman F., *The Voices of Wittgenstein. The Vienna Circle*, Routledge, 2003;
- Wittgenstein L., *Causa ed effetto*, Einaudi, 2006;
- Wittgenstein L., *Ricerche filosofiche*, Einaudi, Torino, 2009;
- Wittgenstein L., *Colloqui al "Circolo di Vienna"*, Mimesis, Milano – Udine, 2011;

Idee per una decostruzione del platonismo matematico a partire da Wittgenstein

L'intento del contributo è estrapolare dalle osservazioni di Wittgenstein sui fondamenti della matematica una critica decostruttiva al platonismo matematico. Secondo la concezione platonista, la matematica si occupa di oggetti astratti esistenti indipendentemente dalle cose empiriche e dalla nostra conoscenza, e le dimostrazioni servono a rivelarne le proprietà essenziali. Wittgenstein contesta questa lettura: le dimostrazioni non scoprono essenze eteree, ma stabiliscono regole e paradigmi per l'uso dei concetti nelle pratiche della vita. L'idea di forme pure o oggetti astratti nasce dall'ipostatizzazione della generalità dei paradigmi linguistici e delle dimostrazioni. La generalità e la necessità della matematica risiedono nell'applicazione dei paradigmi e nelle regole operative, non in un dominio ontologico separato. Si mostrerà così che la "realtà matematica" emerge dall'interazione tra linguaggio, pratica dimostrativa e modellizzazione paradigmatica, e che il platonismo è, in definitiva, un miraggio concettuale.

PAROLE CHIAVE: Wittgenstein, Matematica, Platonismo, Dimostrazione, Decostruzione.

Ideas for a Deconstruction of Mathematical Platonism through Wittgenstein

The aim of this contribution is to extract from Wittgenstein's remarks on the foundations of mathematics a deconstructive critique of mathematical Platonism. According to the Platonist conception, mathematics is concerned with abstract objects that exist independently of empirical things and of our knowledge, and proofs serve to reveal their essential properties. Wittgenstein challenges this reading: proofs do not uncover ethereal essences, but establish rules and paradigms for the use of concepts within the practices of life. The idea of pure forms or abstract objects arises from the hypostatisation of the generality of linguistic paradigms and demonstrations. The generality and necessity of mathematics reside in the application of paradigms and in operative rules, rather than in a separate ontological domain. It is thus shown that "mathematical reality" emerges from the interaction between language, demonstrative practice, and paradigmatic modelling, and that Platonism is, ultimately, a conceptual mirage.

KEYWORDS: Wittgenstein, Mathematics, Platonism, Demonstration, Deconstruction.

Domenico Licciardi

Plasticità del virtuale e problema del continuo

1. Introduzione

L'idea di una "plasticità del virtuale", proposta in *Differential Heterogenesis* di Alessandro Sarti, Giovanna Citti e David Piotrowski, indica "la possibilità di ricombinare elementi genetici per creare dinamiche singolari"¹. Nostro intento è di indagare la portata ontologica di questo concetto in quanto espressione delle dinamiche di un processo intensivo e di analizzarlo alla luce della tesi leibniziana delle percezioni oscure. La nostra lettura è guidata da una domanda precisa: la descrizione dinamica dei processi che sottendono la metamorfosi attraverso una matematica del continuo implica anche un continuismo ontologico? Per illustrare meglio il punto, diremo subito che il motivo della nostra indagine è orientato dall'utilizzo della parola 'plasticità'. Questo concetto, in senso ontologico, indica non solo il mutamento ma anche la creazione di una forma inedita. Si assume che, se una nuova forma è per definizione singolare, occorre pensare la coesistenza nel medesimo istante di uno sviluppo progressivo e del suo scarto rispetto a tutto ciò che la precede. Inoltre, tale simultaneità non può essere un effetto di trasformazione ma deve già costituire ciò da cui in prima istanza lo sviluppo proviene. In tal senso, la plasticità domanda di problematizzare ontologicamente le opposizioni tra continuo e discontinuo, progressione e separazione, sviluppo dinamico e sconvolgimento dello stesso sviluppo dinamico.

Come presupposto generale, riteniamo che il concetto di plasticità del virtuale possa essere letto in due sensi: matematico e ontologico. Nel corso del presente contributo, concentriamo la nostra attenzione

¹ A. Sarti, G. Citti, D. Piotrowski, *Differential Heterogenesis. Mutant Forms, Sensitive Bodies*, Springer, Cham 2022, p. 57.

sul suo senso ontologico, considerandolo non soltanto come un procedimento tecnico bensì come un modo matematico di ‘descrivere’ la costituzione di una percezione a partire da un piano di intensità. In quest’ottica, *Differential Heterogenesis* offre la possibilità di pensare la dinamica di attualizzazione della *plasticità* del virtuale come processo di *formazione* di una sensazione. La tesi leibniziana delle piccole percezioni opera sullo stesso piano ontologico. Inoltre, dal momento che essa ha contribuito sostanzialmente alla concezione, da parte di Deleuze, dell’intensivo come esercizio trascendentale della sensibilità, esiste una linea storiografica che permette di collegare il concetto di plasticità del virtuale alla tesi delle percezioni oscure. Approfondendo quest’ultima alla luce della metafisica monadologica di Leibniz, osserveremo come il rapporto tra percezione e sostanza semplice problematizzi l’inferenza per cui una matematica del continuo implica una concezione ontologicamente continua del virtuale. Al netto, si può dire che Leibniz permetta di pensare il virtuale al di là dell’opposizione tra il continuo e il contiguo e la plasticità del virtuale non come annullamento dei bordi morfologici bensì come loro deformazione stratificata.

Procederemo dunque come segue: 1. Una ricostruzione del procedimento matematico dell’eterogenesi differenziale avrà lo scopo di dimostrare che il procedimento stesso culmina nell’interpretazione deleuziana della sensazione. 2. Un’analisi del testo (ossia del quarto capitolo di *Differential Heterogenesis*) dimostrerà che la portata ontologica della plasticità del virtuale consiste nella ‘descrizione’ matematica del processo di attualizzazione di una sensazione. 3. Una ricostruzione storiografica riconnetterà questo processo alla tesi leibniziana delle piccole percezioni e della percezione monadica. 4. Una parte conclusiva si concentrerà sul cosiddetto ‘problema del continuo’ in Leibniz, al fine di interrogare il rapporto tra il calcolo infinitesimale e la realtà considerata ontologicamente.

2. Morfodinamica eterogenetica

2.1. Morfogenesi ed eterogenesi

Differential Heterogenesis tenta di ripensare la “morfodinamica” al di là dello “strutturalismo” morfologico di René Thom:

La morfodinamica strutturale di Thom [...] è essenzialmente una teoria del controllo delle singolarità, per cui un insieme di variabili di stato può controllare il sistema e guidarlo verso stati stabili desiderati. Come tale, lo spazio interno degli stati è dato a priori. Nella dinamica deleuziana, d’altra parte, le

singolarità sono primarie rispetto allo spazio dei parametri e vengono generate in modo tale da costituire una nuova costellazione di punti.²

Come possiamo osservare nel passaggio citato, i problemi centrali della teoria delle catastrofi sono: 1. La determinazione dei parametri che conducono l'evoluzione dinamica dei sistemi verso modelli tipici di stabilità; 2. L'apriorità dello spazio degli stati rispetto al dinamismo delle forme in atto. In effetti, Thom delinea l'idea di una "morfologia in abstracto, puramente geometrica, indipendente dal substrato delle forme e dalla natura delle forze che la creano". Circoscrive dunque l'operatività del modello alla classificazione degli "incidenti locali della morfogenesi", detti: "catastrofi elementari"³.

Definendo uno spazio U che contiene un sottoinsieme chiuso K (l'insieme di catastrofi), la traiettoria di un punto $u \in U$ rappresenta l'evoluzione dello stato del sistema. Quando u incontra K , il sistema subisce una "discontinuità" nell'aspetto, interpretabile come "un cambiamento della forma preesistente, dunque" in termini di "*morfogenesi*"⁴. Tuttavia, come abbiamo in parte anticipato, Thom dichiara:

L'idea essenziale qui proposta è che la natura locale del sottoinsieme K , il tipo topologico delle sue singolarità, ecc., sono di fatto determinate da una dinamica soggiacente, che in generale sarà impossibile esplicitare. L'evoluzione del sistema sarà definita da un campo di vettori X in uno spazio P ; resterà così definita la dinamica macroscopica.⁵

Benché egli operi una suddivisione tra "una cinematica, di cui è oggetto il parametrizzare le forme o gli stati del processo" e "una dinamica di cui è oggetto il descrivere l'evoluzione temporale tra le forme", la dinamica soggiacente delle forme resta non esplicitata⁶.

La teoria delle catastrofi ha dunque un limite, che appare chiaramente quando si tratta di descrivere lo sviluppo embrionale. Chiamiamo $t(x)$ la variabile di stato e indichiamo con $V(x)$ il potenziale del sistema. La sua evoluzione può essere descritta secondo il gradiente negativo del potenziale come segue: $dx(t)/dt = -\nabla V(x,p)$. Il gradiente negativo indica la direzione verso cui il sistema tende per ridurre il potenziale e raggiungere configurazioni stabili. Se la prima derivata, che indica la pendenza della funzione, si annulla ($\nabla V = 0$), si ha un punto critico, ossia una configurazione

² A. Sarti, G. Citti, D. Piotrowski, *Differential Heterogenesis*, op. cit., p. 41.

³ R. Thom, *Stabilità strutturale e morfogenesi. Saggio di una teoria generale dei modelli*, tr. it. di A. Pedrini, Ghibli, Milano 2023, pp. 11-12.

⁴ *Ivi*, pp. 10-11.

⁵ *Ivi*, p. 11.

⁶ *Ivi*, p. 5.

locale in cui la stabilità del sistema non è immediatamente determinata. Se anche la matrice delle derivate seconde, che descrive la curvatura della funzione in tutte le direzioni intorno a un punto, è nulla ($\emptyset$), il punto critico risulta degenerare. In questa situazione, il comportamento locale del sistema non può più essere compreso considerando solo le derivate fino al secondo ordine. Entra dunque in gioco il concetto di “dispiegamento universale”: si tratta di una famiglia parametrizzata di deformazioni della funzione che descrive le variazioni topologiche locali⁷. Un’esposizione dettagliata, con riferimento alla “serie di Taylor a coefficienti indeterminati” e al concetto di “*getto locale* di ordine r in O ”, potrebbe risultare controproducente⁸. Per il momento, è sufficiente dire che il dispiegamento analizza il modo in cui la funzione si comporta di fronte a piccole perturbazioni locali ed è in grado di determinare se la stabilità del punto critico degenerare è mantenuta o modificata. Posto che l’analisi del dispiegamento abbia dimostrato che il punto critico degenerare è una singolarità, si hanno allora due situazioni principali: 1. Quando la singolarità è di “*codimensione finita*”, le perturbazioni locali generano un numero finito di tipi topologici distinti e la singolarità può essere inserita in una “famiglia di deformazioni a q parametri” (nel testo di Sarti, Citti e Piotrowski), in cui ogni perturbazione locale corrisponde a un punto della famiglia universale tramite una mappa dei parametri⁹. 2. Quando la singolarità è di “*codimensione infinita*”, perturbazioni infinitesimali “possono presentare un’infinità di tipi topologici diversi”, rendendo la struttura locale estremamente impossibile e il comportamento del sistema imprevedibile¹⁰.

La questione, dunque, è la seguente: come superare il formalismo morfologico, parametrico e aprioristico della teoria delle catastrofi? Come determinare una morfodinamica capace di cogliere il divenire in atto delle forme? Per provare a osservare come gli autori rispondono a queste domande, è opportuno considerare il procedimento eterogenetico che essi propongono. Ne parleremo in due tempi, evidenziando prima il passaggio dalle varietà riemanniane alle varietà sub-riemanniane, poi le operazioni di *lifting*, di composizione lineare, di analisi spettrale.

2.2. Dalla varietà di Riemann alle varietà sub-riemanniane

Una varietà (*Mannigfaltigkeit*) può essere definita – senza alcuna pretesa di esaustività – come uno spazio dotato di un elemento lineare

⁷ Ivi, p. 39.

⁸ Ivi, pp. 37 e 39.

⁹ Ivi, p. 40.

¹⁰ Ivi, pp. 39-40.

differenziale che consente di definire una struttura metrica mediante la quale misurare lunghezze, angoli e curvature indipendentemente da ogni immersione in uno spazio euclideo. In ciascun punto della varietà, la posizione può essere determinata da n grandezze indipendenti, corrispondenti alle n dimensioni locali. La varietà si costruisce tramite un procedimento iterabile in cui una funzione continua riduce progressivamente la determinazione del luogo a varietà di dimensione inferiore: “Ripetendo n volte questo procedimento, la determinazione di luogo, in una varietà n -dimensionale, si riduce a n determinazioni di grandezza”¹¹. L’aspetto interessante – per il nostro discorso – è che la geometria intrinseca della varietà è interamente caratterizzata dalla costanza della sua curvatura. In termini geometrici, questo implica l’esistenza di isometrie che permettono di traslare o ruotare le figure sullo spazio della varietà senza alterarne la forma. Per rievocare le parole di Riemann:

Le varietà la cui misura di curvatura è ovunque uguale a zero possono venir considerate un caso particolare di quelle varietà la cui misura di curvatura è ovunque costante. La caratteristica comune di queste varietà, la cui misura di curvatura è costante, si può esprimere anche dicendo che le figure che si trovano su di esse possono essere mosse senza deformarsi. Ché evidentemente le figure su di esse non potrebbero venir spostate e fatte ruotare se, in ogni punto, la misura di curvatura non fosse la stessa in ogni direzione.¹²

La curvatura costante assicura che le relazioni metriche siano identiche in ogni punto e direzione, definendo completamente la struttura geometrica di uno spazio omogeneo. In ogni punto si può costruire uno spazio tangente, che consente di descrivere il movimento in modo continuo e differenziabile. Ciò significa che, data una varietà, la geometria locale – e più precisamente la distanza tra i punti e la lunghezza delle curve – può essere descritta con riferimento allo spazio tangente, ossia al piano vettoriale formato dai vettori tangenti delle curve che passano per un determinato punto. Il piano tangente infatti rappresenta sia la direzione locale dello spazio in un punto (mediante la derivata direzionale), sia la metrica locale, cioè la distanza tra due curve appartenenti allo stesso spazio. Data una varietà un intervallo $(\cdot)$, una curva $(\cdot)$ mappa ogni valore temporale nell’intervallo in un punto della varietà $(\cdot)$. In questo modo, si ottiene una curva parametrizzata, la cui derivata fornisce il vettore che descrive direzione e velocità del movimento lungo la curva. Se a questo si

¹¹ B. Riemann, *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria e altri scritti scientifici e filosofici*, Bollati Boringhieri, a cura di R. Pettoello, Torino 1994, p. 7.

¹² *Ivi*, pp. 14-15.

aggiunge, in ogni punto, la scelta di un sottospazio tangente – ossia una distribuzione che seleziona solo alcune direzioni possibili del movimento – e si definisce una metrica su tale sottospazio, si ottiene una varietà sub-riemanniana.

André Bellaïche definisce questo concetto come segue:

Una varietà sub-riemanniana è spesso definita come una varietà M di dimensione n , insieme a una distribuzione D di piani di dimensione m ($m \leq n$) e a una metrica riemanniana definita su D . Da questa struttura si ricava una distanza su M : la lunghezza di un cammino assolutamente continuo tangente a D è definita tramite la metrica riemanniana su D , e la distanza $d(p, q)$ tra due punti M di è a sua volta definita come l'infimo delle lunghezze di tutti i cammini assolutamente continui che siano tangenti a D e congiungano p e q . Se non esiste alcun cammino di questo tipo, si pone $d(p, q) = 0$.¹³

Questa formulazione mette rigorosamente in rilievo l'aspetto metrico e funzionale della struttura sub-riemanniana. Tuttavia, per i fini che ci interessano, può risultare utile integrare questa prospettiva con una definizione, di taglio più intuitivo, offerta da Sarti, Citti e Piotrowski:

Una varietà sub-Riemanniana è una varietà differenziale M dove, per ogni punto, solo un sottospazio dello spazio tangente, chiamato spazio tangente ammissibile, definisce la geometria dello spazio intorno allo stesso punto. Sebbene lo spazio tangente abbia la stessa dimensione in ogni punto, lo spazio tangente ammissibile avrà una dimensione che varia da punto a punto.¹⁴

Possiamo dunque dire che l'idea di una varietà sub-riemanniana consiste nel limitare le direzioni disponibili in ogni punto di una varietà riemanniana. A partire dallo spazio tangente di una varietà M , si seleziona in ogni punto un sottospazio tangente ammissibile che individua le direzioni percorribili. La dimensione di questo sottospazio può variare da punto

¹³ A. Bellaïche, *The tangent space in sub-Riemannian geometry*, in A. Bellaïche, J.-J. Risler (Ed.), *Sub-Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Basel 2012, pp. 1-84, p. 4. Bellaïche aggiunge altre tre definizioni riguardanti, rispettivamente, la costruzione di una metrica subriemanniana attraverso l'insieme finito dei campi vettoriali lisci $X1Xm$ (cfr. *Ivi*, p. 5); la costruzione di una metrica locale tramite sistemi di campi vettoriali lisci e la distanza derivata dalle lunghezze delle curve (cfr. *Ivi*, p. 6); la costruzione della metrica a partire da un fibrato vettoriale con metrica euclidea e dotato di una mappa lineare che invia i vettori del fibrato sui vettori tangenti della varietà (cfr. *Ivi*, p. 7).

¹⁴ A. Sarti, G. Citti, D. Piotrowski, *Differential Heterogenesis*, cit., p. 62.

a punto in una distribuzione di rango variabile. Come leggiamo a questo punto del testo, “‘lo spazio cambia di natura’ da un punto all’altro”¹⁵.

2.3. Dal lifting alle vibrazioni di Chlandi

Determinate le varietà sub-riemanniane, il passo successivo consiste nella costruzione degli assemblaggi. Ciò può essere realizzato attraverso un processo di lifting, che conserva l’eterogeneità dei campi vettoriali locali ‘sollevandoli’ a un livello superiore. L’assemblaggio si fonda su operatori “sollevati indipendentemente, con il risultato che ciascuno ha una diversa struttura di fibrato, con dimensioni differenti su ciascun patch”¹⁶. Gli operatori locali sono definiti su intorni distinti e vengono poi estesi e ricombinati tramite “partizione delle unità”. Questo permette di costruire un operatore globale che conserva localmente il comportamento degli operatori di partenza e che, nelle zone di sovrapposizione, consente una “trasformazione liscia” tra operatori:

Questo processo di assemblaggio può essere espresso come una combinazione lineare dei due operatori sollevati (o come un’operazione più complessa che coinvolge entrambi):

$$\tilde{A}_{(p_0 p_1, t_0, t_1)} = \phi_0 \tilde{A}_{(p_0, t_0)} + \phi_1 \tilde{A}_{(p_1, t_1)}$$

Poiché ϕ_0 assume valore 1 intorno al punto p_0 e 0 lontano da esso, l’assemblaggio coincide con $\tilde{A}_{(p_0, t_0)}$ in un intorno del punto (p_0, t_0) . Analogamente, poiché ϕ_1 assume il valore 1 intorno al punto p_1 , l’assemblaggio coincide con $\tilde{A}_{(p_1, t_1)}$ in un intorno del punto (p_1, t_1) . L’operatore risultante rappresenta quindi una trasformazione liscia di $\tilde{A}_{(p_0, t_0)}$ in $\tilde{A}_{(p_1, t_1)}$.¹⁷

Si parla di una “trasformazione liscia di $\tilde{A}_{(p_0, t_0)}$ in $\tilde{A}_{(p_1, t_1)}$ ” ma, in realtà, non si tratta, ancora, di una trasformazione in senso proprio, bensì, di una interpolazione liscia. Gli operatori infatti sono stati combinati tramite partizione delle unità ma “lo scopo principale delle partizioni di unità”, afferma Michael Spivak, è di “combinare risultati ottenuti localmente”¹⁸ in una varietà globale. La trasformazione in senso proprio subentra con l’introduzione di due variabili temporali: la prima

¹⁵ *Ivi*, p. 64.

¹⁶ *Ibidem*.

¹⁷ *Ivi*, p. 86.

¹⁸ M. Spivak, *Calculus on Manifolds. A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus*, Addison-Wesley, Boston 1965, p. 64.

(t), “descrive la propagazione del processo nel tempo” e corrisponde al “Khronos” deleziano; la seconda (τ), “descrive l’evoluzione dei vincoli differenziali in un nuovo assemblaggio, dando inizio a nuove dinamiche, istante dopo istante” e corrisponde al tempo dell’“Aion”¹⁹. L’introduzione della variabile τ è in questo caso l’elemento centrale, perché apre la possibilità di una trasformazione graduale tra catastrofi, superando effettivamente il formalismo strutturale di Thom. L’operatore globale è descritto come: $V_\tau = 1 - \tau V_1 + \tau V_2$, “dove V_i corrisponde ai potenziali delle catastrofi elementari”²⁰. Sul piano geometrico, è ora possibile passare linearmente da una piega ad una cuspidale ad una coda di rondine²¹.

A questo punto, “il divenire delle forme emerge come l’attualizzazione u del flusso: $\partial_t u_\tau(t) = \tilde{A}_\tau(u_\tau)(t)$ ” su uno spazio H , ovvero come la traiettoria continua del flusso $((t))$ in uno spazio “di sostanze che cambiano da punto a punto [...]”²². Il flusso eterogenetico può essere rappresentato nei suoi modi propri di vibrazione tramite un embedding armonico, ossia una rappresentazione intrinseca che decodifica le intensità del flusso senza ricorso a strutture esterne, rilevando le sue principali direzioni di variazione. Definendo gli autovettori di un operatore ($\mathcal{E}A(u)$) associato al flusso ($u_i(t)$), è possibile ottenere i modi principali di variazione risolvendo il problema spettrale: $\mathcal{E}A(u_i) = \lambda_i u_i$. Come spiegano gli autori, “ u_i sono i modi di vibrazioni propri della concatenazione”, simili alle “modalità di vibrazione su un piano [plateau] date nei ben noti schemi di Chladni, ottenuti facendo scorrere l’arco di un violino sul lato della lastra fino a raggiungere la risonanza”²³. In questo modo, è possibile teorizzare matematicamente l’emergenza di una sensazione a partire da un flusso eterogenetico:

Nel suo libro su Francis Bacon, Deleuze scrive che la sensibilità è vibrazione e che la sensazione emerge dalla ricezione di queste vibrazioni [...]. Interpretando fedelmente l’idea di vibrazione sensibile suggerita da Deleuze, la percezione abiterà lo spazio dei modi di vibrazione del flusso eterogenetico, vale a dire il suo embedding armonico. L’embedding armonico si riferisce alle intensità del flusso che si decodificano intrinsecamente, senza bisogno di strutture di decodifica esterne. Questo processo non

¹⁹ A. Sarti, G. Citti, D. Piotrowski, *Differential Heterogenesis*, cit., p. 88. Non è possibile in questa sede analizzare dettagliatamente il riferimento degli autori a queste due concezioni della temporalità. Rimandiamo dunque a: G. Deleuze, *Logica del senso*, tr. it. di M. de Stefanis, Feltrinelli, Milano 2014, in particolare a: p. 74.

²⁰ *Ibidem*.

²¹ Cfr. *Ivi*, p. 89, Fig. 4.20.

²² *Ivi*, p. 90.

²³ *Ivi*, p. 92.

corrisponde a una categorizzazione, ma piuttosto a una rilevazione delle principali orientazioni del flusso, anche in assenza di qualsiasi stabilizzazione in forme fisse.²⁴

3. Una matematica delle intensità

Si è detto che Thom esclude consapevolmente la possibilità di descrivere il sostrato dinamico delle forme e delle forze che le generano. Questo aspetto sembra riflettere una posizione epistemologica precisa. Come afferma Arcangelo Rossi:

La teoria delle catastrofi fornisce [...] un modello o meccanismo qualitativo piuttosto che equazioni che descrivano e prevedano qualitativamente cambiamenti di variabili, perturbazioni, deformazioni, mentre la teoria delle catastrofi esprime forme invarianti di tali perturbazioni.²⁵

Per Thom, la forma è indice del fatto che l’“universo non è un caos”, perché “noi vi discerniamo esseri, oggetti, cose che designamo con altrettante parole”²⁶. Egli riconosce che le leggi della scienza – come quelle della meccanica quantistica – “non sono strutturalmente stabili”²⁷. Tuttavia, un “vincolo di intersoggettività” imporrebbe (o dovrebbe imporre) di tenere in considerazione la dimensione qualitativa del nostro rapporto con il mondo. Perché questo rapporto si dà in un’esperienza fenomenologicamente costellata di forme e bordi che delimitano forme:

La realtà si manifesterebbe quindi già nell’esperienza immediata attraverso i bordi che la delimitano, le forme distintive che essa assume, dando così origine anche a quelle nozioni geometriche che sono sì frutto di astrazione rispetto ad altre proprietà, ma restano pur sempre collegate all’esperienza concreta, definendo e dando quindi nome alle cose e ai concetti individuali, distinti, proprio grazie alle loro forme specifiche, da ciò che li circonda.²⁸

Così, la teoria delle catastrofi punta ad “un raffinamento della nostra intuizione geometrica” per cercare di “dotare lo spirito scientifico di un

²⁴ *Ivi*, p. 93.

²⁵ A. Rossi, *René Thom: Catastrofi e complessità*, in R. Barbanti, L. Boi, M. Neve (Ed.), *Paesaggi della complessità. La trama delle cose e gli intrecci tra natura e cultura*, Mimesis, Milano 2011, pp. 89-100, p. 97.

²⁶ R. Thom, *Stabilità strutturale e morfogenesi*, cit., p. 3.

²⁷ R. Thom, *Parabole e catastrofi. Intervista su matematica, scienza e filosofia*, a cura di G. Giorello e S. Morini, PGreco, Milano 2022, p. 36.

²⁸ A. Rossi, *René Thom: Catastrofi e complessità*, cit., p. 90.

complesso di immagini e schemi più raffinati che possano dare intuizioni qualitative soddisfacenti dei fenomeni parziali”²⁹.

Sarti, Citti e Piotrowski puntano invece al sostrato dinamico che la morfogenesi di Thom esclude dal modello strutturale. Questo passaggio è cruciale, perché introduce la possibilità di descrivere matematicamente le dinamiche sottostanti al divenire delle forme, ovvero il nucleo operativo della plasticità del virtuale. Come riporta Andrea de Donato, si tratta di passare dal piano della “morfogenesi” a quello della “genesi della genesi”: dal momento che “il virtuale [...] è anteriore a ogni ente, ne eccede la forma, e ne connota perennemente il modo di darsi pur essendo una forma in eccesso”, l’indagine non può che muovere “al di là dei modelli”³⁰. Muoversi al di là dei modelli è anche il contenuto della lezione ereditata da Albert Lautman, che alla concezione assiomatica della matematica oppone – come sottolineano gli autori – “un linguaggio sempre relativo a circostanze problematiche specifiche e situate”³¹. L’obiettivo epistemico di *Differential Heterogenesis* è dunque quello di liberare “i modelli delle scienze della vita e delle scienze umane” dall’assunzione “senza discussione critica” delle “categorie e [dei] principi dell’epistemologia ‘classica’”. In particolare, dall’utilizzo “nomologico” di “una distribuzione invariante e omogenea degli operatori” per il modellamento concettuale di dati e fenomeni³².

In questa sede, non possiamo ripercorrere in senso storico-epistemologico la filosofia matematica di Lautman, tantopiù che ciò domanderebbe di tenere in considerazione una “dimensione ontologica” complessa e articolata³³. Più rilevante, nel contesto circoscritto della nostra analisi della plasticità del virtuale, è che, come scrivono gli autori, l’interpretazione morfodinamica dell’eterogenesi differenziale si basa – accanto all’intenzione epistemica qui brevemente esposta – sulla considerazione per cui:

La stessa idea del divenire delle forme ha una natura operativa. [...] Il divenire è considerato come il principio creativo che emerge dalla posizione di un problema, in termini di una costellazione di operatori differenziali eterogenei tra loro. Questa fase della composizione plastica dei differenziali mette in gioco la dimensione problematica e intensiva del divenire, che può essere considerata come una forma di plasticità del virtuale.³⁴

²⁹ R. Thom, *Stabilità strutturale e morfogenesi*, cit., p. 9.

³⁰ A. de Donato, *Morfogenesi del concetto. Matematica e stile a partire da Gilles Deleuze*, Orthotes, Napoli 2024, p. 74.

³¹ A. Sarti, G. Citti, D. Piotrowski, *Differential Heterogenesis*, cit., p. 58.

³² *Ibidem*.

³³ M. Castellana, *For an epistemology of mathematical contents: Albert Lautmann*, tr. en. di D. A. Gewurz, «Lettera Matematica», 6 (1), 2018, pp. 45-55, p. 53.

³⁴ A. Sarti, G. Citti, D. Piotrowski, *Differential Heterogenesis*, cit., p. 57.

La plasticità del virtuale, in quanto “possibilità di ricombinare elementi genetici per creare dinamiche singolari”, è dunque una nozione strettamente legata al divenire delle forme. Essa caratterizza la descrizione matematica della dinamica emergente dall’interazione “di una costellazione di operatori differenziali eterogenei”. In questo contesto, gli autori sostengono che “la matematica può essere utilizzata come un linguaggio per evocare il divenire dinamico di una materialità complessa, dotata, nella sua consistenza sostanziale, di un flusso vitale, singolare e semiogenetico”³⁵. Per legittimare questo uso della matematica, essi richiamano un passaggio decisivo di Deleuze, tratto da *Empirismo e soggettività*, che è opportuno richiamare integralmente:

Come può esserci qualcosa di dato, come qualcosa può essere dato a un soggetto, come il soggetto può darsi qualcosa? In questo caso l’esigenza critica è quella di una logica costruttiva che ha il suo modello nelle matematiche. La critica è empirica quando, ponendosi da un punto di vista puramente immanente, da cui sia possibile una descrizione che ha la sua regola in certe ipotesi determinabili e il suo modello nella fisica, ci si domanda a proposito del soggetto: come si costituisce nel dato? La costruzione del dato fa posto alla costituzione del soggetto. Il dato non è più dato a un soggetto, ma è il soggetto che si costituisce nel dato.³⁶

Si possono notare due punti principali. In primo luogo, l’esigenza, espressa da Deleuze, di una “logica costruttiva” (*logique constructive*), basata sul modello della matematica e interpretata dagli autori come un riferimento al costruttivismo matematico, secondo cui l’oggetto esiste solo se costruito secondo regole precise. In secondo luogo, il tema della costruzione del dato come dimensione primaria di un’ontologia epistemologica, definita tale perché riguarda la “costituzione” del soggetto della conoscenza o della rappresentazione gnoseologica.

Come abbiamo visto, Sarti, Citti e Piotrowski assumono esplicitamente solo il primo punto – (1) l’esigenza di una logica costruttivistica – mentre non si fa menzione (almeno in senso esplicito) del secondo – (2) la costituzione del dato. Con questo termine si intende – continuiamo a leggere da *Empirismo e soggettività* – “il flusso del sensibile, una collezione di impressioni e di immagini, un insieme di percezioni”³⁷. Tuttavia, il procedimento

³⁵ *Ivi*, p. 58.

³⁶ G. Deleuze, *Empirismo e soggettività. Saggio sulla natura umana secondo Hume*, a cura di F. Domenicali, Orthotes, Napoli-Salerno 2018, p. 103 (traduzione leggermente modificata, cfr. G. Deleuze, *Empirisme et subjectivité. Essai sur la nature humaine selon Hume*, PUF, Paris 1953, p. 92]; cit. in: A. Sarti, G. Citti, D. Piotrowski, *Differential Heterogenesis*, op. cit., p. 57.

³⁷ G. Deleuze, *Empirismo e soggettività*, cit., p. 103.

matematico della ‘morfodinamica eterogenetica’ culmina nella descrizione del modo in cui gli autovettori dell’operatore $\mathcal{E}A(u)$ associato al flusso $u_i(t)$ interpretano “fedelmente l’idea di vibrazione sensibile suggerita da Deleuze”. La nostra ipotesi di lettura è che sia possibile interpretare il flusso del campo vettoriale come una ‘descrizione’ del flusso sensibile o meglio intensivo che precede la costituzione della soggettività. In tal senso, la costruzione matematica non è solo formalismo, ma un linguaggio operativo che permette di modellare il flusso intensivo che precede la soggettività.

Assumendo questa ipotesi, si può dire che la plasticità del virtuale – in quanto possibilità di ricombinare elementi genetici costituenti una costellazione di operatori differenziali eterogenei – ‘descrive’ matematicamente la costituzione dei “modi di vibrazione” sulla cui base sarà possibile impostare lo studio percettologico della neuromatematica della visione e lo studio semiotico della fenomenologia di Merleau-Ponty (che costituiscono gli oggetti d’indagine dei successivi capitoli cinque e sei)³⁸. In quest’ottica, si può dire che la plasticità del virtuale non riguarda solo l’esigenza di indagare il divenire attraverso una prospettiva matematico-costruttivista (1). Bensì, anche, di ‘descrivere’ matematicamente il divenire in quanto flusso intensivo (2). Dopo il saggio su Hume, Deleuze sviluppa questa idea (2) in chiave leibniziana. Il flusso intensivo così descritto trova un precedente metafisico nell’idea leibniziana delle piccole percezioni, che permette di interpretare l’ontologia del sensibile come una serie di relazioni intensionali. Per questo motivo, è opportuno procedere con una breve ricostruzione storiografica che permetta di analizzare il sostrato metafisico da cui nasce l’idea di interpretare l’ontologia del sensibile in termini di rapporto intensivo.

4. La percezione, tra continuità e separatezza

È noto che, in polemica con Locke, Leibniz elabora l’idea di una percezione virtuale o disposizionale. Locke sostiene che pensare e percepire siano attività inseparabili. Per questa ragione, egli nega che il pensiero in atto costituisca l’essenza dell’anima: se così fosse, infatti, l’anima percepirebbe costantemente di pensare. Nel Saggio sull’intelletto umano, egli argomenta:

Confesso che a me è toccata una di quelle anime [...] che non considera necessario per l’anima pensare sempre, più di quanto non lo sia per il corpo muoversi sempre; infatti, per l’anima la percezione delle idee [...] equivale a

³⁸ A. Sarti, G. Citti, D. Piotrowski, *Differential Heterogenesis*, cit., p. 93.

ciò che è il moto per il corpo: non è il suo carattere peculiare, la sua essenza, è [solo] una delle sue operazioni.³⁹

Leibniz, al contrario, afferma che la stasi è un movimento prossimo al riposo e che, se si danno momenti in cui l'anima non percepisce di pensare, è perché "vi sono a ogni momento una infinità di percezioni in noi, ma senza appercezione e senza riflessione, cioè cambiamenti nell'anima di cui noi non ci accorgiamo perché le impressioni sono o troppo piccole o troppo numerose o troppo congiunte"⁴⁰. Locke esclude che possa esservi un pensiero senza coscienza, perché minaccia la logica dell'identità individuale: "se distacciamo del tutto la coscienza dalle nostre azioni e sensazioni, [...] sarà difficile sapere dove si colloca l'identità di un individuo"⁴¹. Leibniz, al contrario, pensa che l'individualità debba essere spiegata a partire da un campo 'insensibile', che a un tempo eccede e costituisce l'esperienza soggettiva: "queste percezioni insensibili distinguono e costituiscono l'individuo stesso che è caratterizzato dalle tracce o espressioni che esse conservano, degli stati precedenti di esso, facendo la connessione con il suo stato presente"⁴².

La tesi delle percezioni oscure è centrale nella concezione deleuziana dell'inconscio. Deleuze analizza a fondo il pensiero di Leibniz nella *Piega* ma i riferimenti ad un "inconscio differenziale" sono presenti almeno dal 1967⁴³. È specialmente in *Differenza e ripetizione* che viene ripreso il tema delle piccole percezioni. Commentando questo testo, Claudio D'Aurizio scrive che "le nostre appercezioni, le nostre percezioni coscienti, sarebbero il risultato dei numerosissimi movimenti di minuscole percezioni, e dei rapporti che intrattengono tra di loro"⁴⁴. Il pensiero leibniziano gioca un ruolo molto importante per comprendere il concetto di "essere del sensibile". Ancora in *Differenza e ripetizione*, Deleuze scrive:

È la differenza nell'intensità [...] a costituire l'essere "del" sensibile. [...] L'intensità, la differenza nell'intensità, costituisce il limite proprio della sensi-

³⁹ J. Locke, *Saggio sull'intelletto umano*, tr. it. di V. Cicero e M. G. D'Amico, Giunti-Bompiani, Firenze-Milano 2021, p. 165.

⁴⁰ G. W. Leibniz, *Nuovi saggi sull'intelletto umano*, in Id., *Scritti filosofici*, Vol. 2, a cura di D. O. Bianca, UTET, Torino 1968, p. 173.

⁴¹ J. Locke, *Saggio sull'intelletto umano*, cit., p. 167.

⁴² G. W. Leibniz, *Nuovi saggi sull'intelletto umano*, cit., p. 175.

⁴³ Cfr. C. D'Aurizio, *L'inconscio differenziale. Un concetto firmato Deleuze*, «L'inconscio. Rivista italiana di filosofia e psicoanalisi», 5, 2018, pp. 92-113, p. 98. Cfr. G. Deleuze, *Da che cosa si riconosce lo strutturalismo?*, in Id., *L'isola deserta e altri scritti. Testi e interviste 1953-1974*, a cura di D. Borca, Einaudi, Torino 2007, pp. 91-109.

⁴⁴ *Ivi*, p. 102.

bilità, talché ha il carattere paradossale di questo limite, per cui è l'insensibile, ciò che non può essere sentito, perché è sempre ricoperta da una qualità che la aliena o la "contraria", distribuita in un esteso che la rovescia e la annulla. Ma in un altro senso, l'intensità è ciò che può essere soltanto sentito, ciò che definisce l'esercizio trascendentale della sensibilità.⁴⁵

Se l'intensità "definisce l'esercizio trascendentale della sensibilità", è ancora Leibniz – come sottolinea D'Aurizio – ad aprire "la possibilità d'indagare il groviglio di chiarezza e oscurità, distinzione e confusione che determina il campo 'trascendentale' della nostra esperienza"⁴⁶.

L'essere del sensibile è dunque definito in termini d'intensità. La differenza tra le intensità, dal suo canto, è un problema differenziale. Più precisamente, un rapporto tra parti eterogenee. Ne La piega, Deleuze scrive:

Dobbiamo intendere alla lettera, cioè matematicamente, che una percezione cosciente si produce quando due (o più) parti eterogenee entrano tra loro in un rapporto differenziale che determina una singolarità. È come nell'equazione della circonferenza $ydy + xdx = 0$ o $dy/dx = -x/y$ esprime una grandezza determinabile.⁴⁷

Ora, le parti di una percezione consistono di percezioni sempre più piccole. Il limite è costituito dalla percezione monadica. Seguendo la Monadologia, questo termine può essere definito come ciò che nella monade è mutevole:

Da quanto abbiamo detto, consegue che i mutamenti naturali delle monadi derivano da un principio interno, perché una causa esterna non potrebbe influire nel suo interno. Occorre però che oltre il principio del mutamento, si trovi in essa un dettaglio che muta, che costituisca, per così dire, la specificazione e la varietà delle sostanze semplici. Questo dettaglio deve implicare una molteplicità nell'unità o nel semplice. Infatti, poiché ogni mutamento naturale avviene per gradi, qualcosa muta e qualcosa permane; di conseguenza bisogna che nella sostanza semplice vi sia una pluralità di affezioni e di rapporti, benché non vi siano parti. Lo stato passeggero, che implica e rappresenta una molteplicità nell'unità o sostanza semplice, non è altro che ciò che è chiamato percezione.⁴⁸

⁴⁵ G. Deleuze, *Differenza e ripetizione*, tr. it. di G. Guglielmi, Raffaello Cortina, Milano 1997, p. 306.

⁴⁶ C. D'Aurizio, *L'inconscio differenziale*, cit., p. 104.

⁴⁷ G. Deleuze, *La piega. Leibniz e il Barocco*, a cura di D. Tarizzo, Einaudi, Torino 2004, pp. 143-144.

⁴⁸ G. W. Leibniz, *Principi della filosofia o monadologia*, in Id., *Scritti filosofici*, Vol. 1, a cura di D. O. Bianca, UTET, Torino 1967, p. 284.

Coerentemente con questa impostazione, nei *Principi della natura e della grazia* fondati sulla ragione, le percezioni monadiche appaiono, accanto all'appetito, come l'elemento della differenza qualitativa tra le monadi:

Le monadi, non avendo parti, non possono essere formate né disfatte: esse non possono cominciare né finire secondo natura, perciò durano quanto l'universo che potrà essere modificato, ma non distrutto. Esse non possono avere figure, altrimenti avrebbero parti: una monade, perciò, non può, in se stessa e nel momento essere distinta da un'altra che per qualità ed azioni interne, le quali non possono essere che le sue percezioni (cioè le rappresentazioni, nel semplice, del composto o di ciò che è esterno); e le sue appetizioni (cioè le sue tendenze da una percezione all'altra), che costituiscono i principi del cambiamento. La semplicità della sostanza, infatti, non esclude la molteplicità delle modificazioni, che devono trovarsi insieme nella stessa sostanza semplice e che devono consistere nella varietà dei rapporti con le cose che le sono esterne. È come in un centro o punto, nel quale, per quanto semplice, si trovano un'infinità di angoli, formati dalle rette che vi concorrono.⁴⁹

Fino a questo punto, possiamo osservare che le monadi mutano costantemente e che sono tra loro differenziate dalle loro percezioni, intese come le rappresentazioni interne del composto. Questo mutamento è infinitesimale, come mostra l'immagine finale degli angoli costituiti da un'infinità di rette concorrenti.

Ora, per determinare come si forma una percezione cosciente non è sufficiente che vi siano interazioni tra piccole percezioni differenti. Beninteso, Leibniz scrive che: "Le percezioni [...] all'interno della monade nascono le une dalle altre in virtù delle leggi dell'Appetizione o delle cause finali del bene e del male, che consistono nelle percezioni osservabili"⁵⁰. La percezione cosciente, però, domanda che vi siano corpi, non come condizioni fisiologiche della sensazione, bensì come il correlato dell'attività percettologica che distingue ogni monade dalle altre:

Nella natura tutto è pieno; ovunque vi sono sostanze semplici, effettivamente separate le une dalle altre, in forza di azioni proprie che cambiano continuamente i loro rapporti, e ciascuna sostanza semplice o monade separata, che costituisce il centro di una sostanza composta (come, per esempio di un animale), ed il principio della sua unicità, è circondata da una massa composta di una infinità di altre monadi, che costituiscono il suo corpo organico, proprio di quella monade centrale, seguendo le cui modificazioni,

⁴⁹ G. W. Leibniz, *Principi della natura e della grazia fondati sulla ragione*, in Id., *Scritti filosofici*, Vol. 1, cit., p. 274.

⁵⁰ *Ivi*, p. 275.

quella monade si rappresenta, come in una specie di centro, le cose che le sono esterne. Questo corpo, poi, è organico, quando costituisce una specie di automa o una macchina della natura, macchina non solo nel tutto, ma anche nelle parti più piccole che è possibile osservare. E poiché a causa della pienezza del mondo tutto è connesso, e ciascun corpo agisce su ciascun altro, più o meno, a seconda della distanza, e per reazione viene modificato: ne deriva di conseguenza che ogni monade è uno specchio vivente, dotato di una attività interna, che si rappresenta l'universo secondo il proprio punto di vista, ed è altrettanto regolata che l'universo stesso. Le percezioni poi all'interno della monade nascono le une dalle altre in virtù delle leggi dell'Appetizione o delle cause finali del bene e del male [...] così come i mutamenti dei corpi ed i fenomeni esterni nascono in virtù delle leggi delle cause efficienti cioè dei mutamenti.⁵¹

La monade, dunque, è una sostanza semplice che muta incessantemente per effetto della propria appetizione e si distingue dalle altre attraverso le proprie percezioni. Tale distinzione non ha inizio, non ha nascita, cosicché le monadi sono, fin da sempre, effettivamente separate. Le percezioni, pur essendo interne alla monade, rappresentano virtualmente il composto. Se la percezione monadica è continua, il composto virtuale – o il molteplice nell'unità – è altrettanto continuo. Ma il processo di costituzione di una percezione cosciente non è lo sviluppo di un unico flusso percettivo, bensì, l'integrazione dei flussi percettivi di un'infinità di monadi separate che compongono il corpo. Dal punto di vista fenomenico, l'integrazione annulla progressivamente i limiti che separano i flussi percettivi di ogni singola monade, generando una percezione unitaria. Dal punto di vista metafisico, le monadi intrattengono tra loro un rapporto di contiguità, perché la percezione non annulla la loro separatezza, neppure nel composto.

Ma non si tratta di stabilire ordini di priorità. Perché, come abbiamo visto, le monadi, in quanto sostanze semplici, sono distinte le une dalle altre dal processo continuo dei loro mutamenti interni. La loro separazione deriva dal fatto che i rispettivi movimenti percettivi e appetitivi sono fin da sempre tra loro distinti. Il risultato è che le monadi differiscono continuamente le une dalle altre perché sono contigue, e sono contigue perché differiscono continuamente le une dalle altre. Non è dunque possibile stabilire il primato del continuo o del contiguo, come avverrebbe in una logica temporale di concatenamento dei rapporti consecutivi, che impone di stabilire un ordine di priorità⁵². Nell'eternità della metafisica, invece, tutto accade simultaneamente, cosicché si può dire che l'idea della virtualità del sensibile implica la simultaneità tra continuità e conti-

⁵¹ *Ivi*, pp. 274-275.

⁵² Cfr. Aristotele, *Fisica*, IV, 227a, 18-28, a cura di M. Zanatta, UTET, Torino 1999, p. 267.

guità. Non è detto, insomma, che una matematica del continuo implichi la continuità dei processi ontologici che essa descrive. Piuttosto, occorre riconoscere che né l'intensivo, né la plasticità, sono riducibili all'opposizione tra il continuo e il contiguo. Per cercare di chiarire questo punto, è opportuno far riferimento a ciò che, negli studi leibniziani, prende il nome, appunto, di 'problema del continuo'.

5. Il problema del continuo

Il 'problema del continuo' concerne la legittimità dell'utilizzo 'metafisico' del calcolo. Richiamarlo ci aiuta a inquadrare la relazione tra il continuo e il contiguo in un'ottica differente rispetto ad una logica che vede questi termini come inconciliabili. Inoltre, offre un contesto alla nostra interpretazione, necessariamente parziale, della monadologia.

Per introdurre il 'problema', ci sembra opportuno richiamare le parole che Leibniz indirizza a Pierre Varignon il 2 febbraio 1702. Dopo aver chiarito che l'analisi matematica non dev'essere influenzata da conflitti metafisici, egli scrive:

La continuità è una cosa ideale e [...] non c'è mai nulla in natura che abbia parti perfettamente uniformi; ma, a conti fatti, il reale non smette di essere governato perfettamente dall'ideale e dall'astrato, e risulta che le regole del finito riescono ad operare nell'infinito, come se esistessero atomi (ossia, elementi assegnabili alla natura), benché non ve ne siano, la materia essendo attualmente suddivisa senza fine; e che, viceversa, le regole dell'infinito riescono ad operare nel finito, come se esistessero piccoli infiniti metafisici, benché non se ne abbia bisogno; e [benché] la divisione della materia non approdi mai alle particelle infinitamente piccole.⁵³

Leibniz, dunque, afferma che non esiste una corrispondenza perfetta tra il continuo matematico e il reale ("reel"): in un certo senso, essi si accordano, secondo l'idea di un'armonia prestabilita. Ma si tratta anche di un accordo 'di principio', più che di fatto, dal momento che, come egli afferma nella chiusura del passaggio, se fosse altrimenti, "non ci sarebbe né scienza né regola, il che non sarebbe conforme alla natura del principio supremo"⁵⁴. Cionondimeno, lo statuto ideale del continuo non è stato ignorato dalla letteratura critica. La formulazione più compiuta del problema del continuo ci è offerta da Samuel Levy, che sintetizza il punto nel modo che segue:

⁵³ G. W. Leibniz, *Leibniz an Varignon*, Hanover 2 Frevier 1702, in Id., *Gesammelte Werke*, 3, 6, herausgegeben von G. H. Pertz, H. W. Schmidt, Halle 1859, pp. 93-94.

⁵⁴ *Ivi*, p. 94.

La determinatezza degli oggetti discreti dipende dalla presenza di “sostanze reali” che, come egli [Leibniz] afferma, “sono negli attuali”, intendendo con ciò che gli attuali sono costruiti, o fondati, sulla “molteplicità delle monadi o sostanze semplici”. Il mondo della materia si scompone in parti, perché vi è un reale sostrato di sostanze dal quale esso è costruito in quel modo specifico. L'indeterminatezza caratteristica degli oggetti continui, d'altra parte, deriva precisamente dall'assenza di qualunque sottostruttura monadica. Nei continua “non ci sono limitazioni di sorta su come si vogliano assegnare le parti”, proprio perché non vi è nulla, in essi, che vincoli il modo in cui tali parti devono essere assegnate. I continua, a differenza degli oggetti materiali, sono puri costrutti della mente – ideali, entia rationis – e in nessun modo incorporano una realtà sostanziale.⁵⁵

Ciò lascia emergere una condizione ben precisa in merito al rapporto tra il continuo e la realtà: la descrizione del mondo basata sui continua è valida solo se la struttura monadica del mondo è sospesa. Si potrebbe credere che ciò implichi una delimitazione molto netta tra realtà e idealità. Tuttavia, la questione è più complessa. Il continuo indica l'insieme delle connessioni, ossia le relazioni, tra gli oggetti o tra le sostanze. Le relazioni, sebbene ideali, si basano sulle proprietà degli oggetti e sugli accidenti delle sostanze. Per questo motivo, ‘ideale’ non significa ‘fittizio’. D'altro canto, il continuo si dà solo se la separazione dei limiti tra i corpi e le monadi è tolta. Un'opzione che Leibniz non accetta, come dimostra la corrispondenza con Johann Bernoulli tra l'agosto del 1698 e il febbraio del 1699.

Bernoulli gli rimprovera di accettare la divisione infinita delle grandezze finite e, contemporaneamente, di negare l'esistenza effettiva degli infinitesimi:

Ammetti che una porzione finita di materia sia già divisa in parti in numero infinito, e tuttavia neghi che qualcuna di queste particelle possa essere infinitamente piccola: come si conciliano queste cose? Infatti, se nulla è infinitamente piccolo, allora ciascuna particella è finita; se ciascuna è finita, allora tutte insieme costituiscono una grandezza infinita, contro l'ipotesi. Immagina che una certa grandezza determinata sia divisa in parti geometriche secondo questa progressione discendente: $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \text{ecc.}$ Finché il numero dei termini è finito, ammetto che ciascun termine sarà anch'esso finito; ma se tutti i termini esistono in atto, ve ne sarà certo uno infinitesimo, e tutti i seguenti avranno grandezza infinitamente piccola.⁵⁶

⁵⁵ S. Levey, *Leibniz on Mathematics and the Actual Infinite Division of Matter*, «The Philosophical Review», 107 (1), 1998, pp. 49-96, p. 67.

⁵⁶ G. W. Leibniz, *Gesammelte Werke*, Vol. 3, herausgegeben von G. H. Pertz, H. W. Schmidt, Halle 1856, p. 529.

La replica di Leibniz è che una serie infinita può essere tranquillamente concepita come una somma di termini finiti:

Si torna qui agli infinitesimali, per provare questa proposizione che applichi: se in una serie come $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$, ecc., vi sono termini in numero infinito, allora esiste un infinitesimo. Se ciascuno di essi fosse finito, che cosa impedirebbe, dopotutto, di concepire una serie composta non da termini infinitamente piccoli, ma da termini finiti in numero infinito?⁵⁷

Nella lettera del 21 febbraio 1699, Leibniz torna sull'argomento, permettendoci di specificare il suo argomento:

Tu non rispondi alla mia ragione, che ho addotto, sul perché non segua: "se vi sono termini infiniti, allora vi è un infinitesimo". Infatti, si può concepire una serie infinitamente numerosa, composta soltanto di termini finiti, ossia ordinari, di una progressione geometrica decrescente. Concedo che vi sia una moltitudine infinita, ma questa moltitudine non costituisce un numero né un tutto unico; e non significa altro se non che vi sono più termini di quanti possano essere designati da un numero. Proprio come esiste la moltitudine, o l'insieme, di tutti i numeri; ma tale moltitudine non è un numero, né un tutto unico.⁵⁸

Possiamo parafrasare la questione come segue. Dal momento che la serie di tutti i numeri non costituisce un numero effettivo né una totalità compiuta, l'infinita divisibilità delle grandezze non implica l'esistenza effettiva degli infinitesimali. Come abbiamo visto, l'infinitamente piccolo esiste solo idealmente.

Secondo Richard Arthur, questo aspetto non è limitato all'argomento del numero di tutti i numeri, bensì ad una concezione nominalistica dell'infinito che, determinando l'idealità degli infinitesimi, determina il limite del loro utilizzo in ambito metafisico. Quello di Leibniz sarebbe un

Infinito sincategorematico, sostenuto da nominalisti come Ockham. Il calcolo differenziale di Leibniz è costruito esplicitamente sulla base di questa interpretazione dell'infinito, con un'interpretazione parallelamente sincategorematica degli infinitesimi come indicanti il fatto che le parti possono sempre essere ulteriormente divise. Leibniz rifiutava l'esistenza di un infinito categorematico, inteso come un numero infinito di parti. Di conseguenza, un tutto costituito da un'infinità attuale di parti non può, nel suo pensiero, essere una collezione delle sue parti: se lo fosse, avrebbe

⁵⁷ *Ivi*, p. 560.

⁵⁸ *Ivi*, p. 575.

un corrispondente numero infinito (cardinale), ossia un'infinità categorica di parti, e questo Leibniz lo nega. Così, l'insieme delle parti della materia o dello spazio in un dato istante non è una totalità reale, cioè una totalità compiuta di parti. Le parti, tuttavia, sono attuali, rese attuali dai diversi movimenti che le animano, e sono quindi, nel modo preferito da Leibniz di esprimersi, priorì rispetto alla totalità che costituiscono. In ciò esse differiscono da una vera totalità continua, che è anteriore a ciascuna delle parti nelle quali può essere divisa. [...] Dunque, laddove per Spinoza il mondo fenomenico – il mondo esteso che appare ai sensi – è un'immaginazione emanata, per così dire, dall'immensum come sorgente della propria realtà, per Leibniz la materia estesa presuppone delle unità dalle quali è aggregata e dalle quali deriva la sua realtà.⁵⁹

Dal momento che non esiste un numero di tutti i numeri, si può dire che gli infinitesimi non sono enti reali, così come l'infinito non è una totalità che ingloba le sue parti. È per questo motivo che l'universo non è l'espressione di un flusso sostanziale ma è composto da aggregati di sostanze semplici.

Eccoci dunque al cuore del problema del continuo. Gli infinitesimi sono, in se stessi, enti ideali. Tuttavia, per spiegare i fenomeni, è necessario che “vi siano vere sostanze delle quali tutti gli aggregati siano costituiti”, come Leibniz scrive ad Arnauld nel 1687⁶⁰. Come accordare, allora, la postura nominalistica – che impedisce di ricondurre le infinite parti di cui è composto il mondo ad una totalità – con il principio di continuità? Come pensare il continuo senza annullare i limiti che separano le sostanze? Nell'orizzonte del problema del continuo, notiamo che le percezioni oscure sono immateriali ma non sono ideali. Le si potrebbe considerare tali solo se le si concepisse come il prodotto di una soggettività già costituita. Però, come abbiamo visto, è grazie a loro che si determina una individualità. Grazie al loro statuto immateriale ma non ideale, le percezioni oscure permettono che il continuo si dia nel contiguo senza il bisogno di dover ricorrere ad un'idealità e senza tradire la concezione nominalistica dell'infinito.

6. Conclusione

Lo studio (parziale) della tesi delle percezioni oscure alla luce del ‘problema del continuo’ dimostra non soltanto che una matematica

⁵⁹ R. T. W. Arthur, *Leibniz's Theory of Space*, «Foundations of Science», 18 (3), 2013, pp. 499-528, pp. 511-512.

⁶⁰ G. W. Leibniz, *Leibniz ad Arnauld. Gottinga, 30 aprile 1687*, in Id., *Scritti filosofici*, Vol. 1, cit., p. 155.

del continuo non implica, di per sé, una ontologia del continuo ma anche che le dinamiche aggregative della plasticità, della ricombinazione di elementi genetici per la creazione di forme inedite, sono irriducibili all'opposizione tra continuità e contiguità. Benché tali elementi siano descrivibili come operatori differenziali, questo non implica l'inesistenza di bordi effettivi. Da questo punto di vista, la plasticità del virtuale, secondo la nostra interpretazione, offre la possibilità di pensare simultaneamente il bordo e il liscio su un'infinità di piani differenti. Cosicché, ogni piano determina una deformazione infinitesima del bordo, fino alla realizzazione della trasformazione. La simultaneità di questi piani sembra indicare che la formazione della forma non avvenga in un unico processo continuo, ma attraverso una stratificazione di bordature e deformazioni.

Bibliografia

- Aristotele, *Fisica*, IV, 227a, 18-28, a cura di M. Zanatta, UTET, Torino 1999
- Arthur, R. T. W., *Leibniz's Theory of Space*, «Foundations of Science», 18 (3), 2013, pp. 499-528
- Bellaïche, A., *The tangent space in sub-Riemannian geometry*, in A. Bellaïche, J.-J. Risler (Ed.), *Sub-Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Basel 2012, pp. 1-84
- Castellana, M., *For an epistemology of mathematical contents: Albert Lautmann*, tr. en. di D. A. Gewurz, «Lettera Matematica», 6 (1), 2018, pp. 45-55
- D'Aurizio, C., *L'inconscio differenziale. Un concetto firmato Deleuze*, «L'inconscio. Rivista italiana di filosofia e psicoanalisi», 5, 2018, pp. 92-113
- de Donato, A., *Morfogenesi del concetto. Matematica e stile a partire da Gilles Deleuze*, Orthotes, Napoli 2024
- Deleuze, G., *Da che cosa si riconosce lo strutturalismo?*, in Id., *L'isola deserta e altri scritti. Testi e interviste 1953-1974*, a cura di D. Borca, Einaudi, Torino 2007, pp. 91-109
- Deleuze, G., *Differenza e ripetizione*, tr. it. di G. Guglielmi, Raffaello Cortina, Milano 1997
- Deleuze, G., *Empirisme et subjectivité. Essai sur la nature humaine selon Hume*, PUF, Paris 1953
- Deleuze, G., *Empirismo e soggettività. Saggio sulla natura umana secondo Hume*, a cura di F. Domenicali, Orthotes, Napoli-Salerno 2018
- Deleuze, G., *La piega. Leibniz e il Barocco*, a cura di D. Tarizzo, Einaudi, Torino 2004
- Deleuze, G., *Logica del senso*, tr. it. di M. de Stefanis, Feltrinelli, Milano 2014
- Leibniz, G. W., *Gesammelte Werke*, Vol. 3, herausgegeben von G. H. Pertz, H. W. Schmidt, Halle 1856
- Leibniz, G. W., *Leibniz ad Arnould. Gottinga*, 30 aprile 1687, in Id., *Scritti filosofici*, Vol. 1, in Id., *Scritti filosofici*, Vol. 1, a cura di D. O. Bianca, UTET, Torino 1967

- Leibniz, G. W., *Leibniz an Varignon*, Hanover 2 Frevier 1702, in Id., *Gesammelte Werke*, 3, 6, herausgegeben von G. H. Pertz, H. W. Schmidt, Halle 1859
- Leibniz, G. W., *Nuovi saggi sull'intelletto umano*, in Id., *Scritti filosofici*, Vol. 2, a cura di D. O. Bianca, UTET, Torino 1968
- Leibniz, G. W., *Principi della filosofia o monadologia*, in Id., *Scritti filosofici*, Vol. 1, a cura di D. O. Bianca, UTET, Torino 1967
- Leibniz, G. W., *Principi della natura e della grazia fondati sulla ragione*, in Id., *Scritti filosofici*, Vol. 1, a cura di D. O. Bianca, UTET, Torino 1967
- Levey, S., *Leibniz on Mathematics and the Actual Infinite Division of Matter*, «The Philosophical Review», 107 (1), 1998, pp. 49-96
- Locke, J., *Saggio sull'intelletto umano*, tr. it. di V. Cicero e M. G. D'Amico, Giunti-Bompiani, Firenze-Milano 2021
- Riemann, B., *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria e altri scritti scientifici e filosofici*, Bollati Boringhieri, a cura di R. Pettoello, Torino 1994
- Rossi, A., *René Thom: Catastrofi e complessità*, in R. Barbanti, L. Boi, M. Neve (Ed.), *Paesaggi della complessità. La trama delle cose e gli intrecci tra natura e cultura*, Mimesis, Milano 2011
- Sarti, A., Citti, G., Piotrowski, D., *Differential Heterogenesis. Mutant Forms, Sensitive Bodies*, Springer, Cham 2022.
- Spivak, M., *Calculus on Manifolds. A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus*, Addison-Wesley, Boston 1965
- Thom, R., *Parabole e catastrofi. Intervista su matematica, scienza e filosofia*, a cura di G. Giorello e S. Morini, PGreco, Milano 2022
- Thom, R., *Stabilità strutturale e morfogenesi. Saggio di una teoria generale dei modelli*, tr. it. di A. Pedrini, Ghibli, Milano 2023

Plasticità del virtuale e problema del continuo

Questo articolo indaga il senso ontologico del concetto di plasticità del virtuale, proposto da Sarti, Citti e Piotrowski in *Differential Heterogenesis*, per cercare di stabilire se la descrizione delle dinamiche che sottendono la percezione attraverso una matematica del continuo implichi necessariamente un continuismo ontologico. A tal fine, l'analisi connette la morfodinamica eterogenetica degli autori alla tesi leibniziana delle percezioni oscure, che ha influenzato la concezione deleuziana dell'intensivo. Attraverso questa linea storiografica, si indaga la questione dell'attualizzazione della sensazione a partire da un campo virtuale alla luce del problema del continuo in Leibniz, per dimostrare la possibilità di pensare la plasticità del virtuale al di là dell'opposizione tra continuità e contiguità.

PAROLE CHIAVE: Plasticità, Eterogenesi, Continuo, Contiguo, Virtuale

Plasticity of the Virtual and the Problem of the Continuum

This article investigates the ontological significance of the concept of plasticity of the virtual, as proposed by Sarti, Citti, and Piotrowski in *Differential Heterogenesis*, in order to determine whether describing the dynamics underlying perception through a mathematics of the continuum necessarily entails an ontological continuism. To this end, the analysis connects the authors' heterogenetic morphodynamics with Leibniz's thesis of obscure perceptions, which influenced Deleuze's conception of the intensive. Through this historiographical line of inquiry, the article examines the problem of the actualisation of sensation from a virtual field in light of Leibniz's treatment of the continuum, thereby demonstrating the possibility of conceiving the plasticity of the virtual beyond the opposition between continuity and contiguity.

KEYWORDS: Plasticity, Heterogenesis, Continuum, Contiguity, Virtual

Biografie autori

Charles Alunni è un filosofo francese, professore all' École Normale Supérieure di Parigi. Alunni è noto per il suo lavoro sulla filosofia della scienza e ha studiato a fondo il pensiero di figure importanti come Gaston Bachelard, Jean Cavaillès, Albert Lautman, Gilles Châtelet. I suoi interessi di ricerca includono l'interazione tra matematica, filosofia e linguistica. Alunni è autore di diversi libri e numerosi articoli sulla storia e la filosofia della matematica contemporanea. Ha inoltre organizzato conferenze internazionali e curato diversi libri, ed è membro del comitato editoriale della rivista *Revue de synthèse* (Fondation pour la Science/Caphès).

Giulio Amore è dottorando di ricerca in Filosofia presso l'Università degli Studi di Padova e fa parte del gruppo di ricerca Metamorfosi del Trascendentale. I suoi interessi di ricerca si focalizzano sul rapporto tra intelligenza artificiale e filosofia, sull'intelligenza artificiale intesa come concetto, su Turing e su altri temi di filosofia della tecnologia.

Sofia Cattani studia filosofia presso la Sapienza Università di Roma, dove ha conseguito la laurea triennale con una tesi intitolata *La bellezza della matematica nella filosofia critica di Kant*. I suoi interessi si collocano all'intersezione tra estetica ed epistemologia.

Andrea Colombo è assegnista di ricerca all'Università di Udine e professore a contratto di Storia della Filosofia e di Storia della Filosofia Contemporanea presso l'Università di Padova. Il suo lavoro di ricerca si concentra sull'empirismo e sulle sue varie declinazioni nel corso del ventesimo secolo, con particolare attenzione al pensiero di Gilles Deleuze, William James e Alfred North Whitehead. La sua ricerca si è focalizzata sulla relazione tra le scienze e la filosofia, specialmente tra il pensiero di Gilles Deleuze e la matematica contemporanea. È autore di *Immanenza e molteplicità. Gilles Deleuze e le matematiche del Novecento* (Mimesis, 2023) e di *F.H. Bradley e W. James. Un dibattito metafisico alle origini del*

pensiero contemporaneo (Mimesis, 2024). Ha anche curato e tradotto *Il corso sulla percezione* (1964-1965) di Gilbert Simondon, la nuova edizione dei *Saggi sull'Empirismo Radicale* di William James (Mimesis, 2023), la nuova edizione de *Il virtuale* di Pierre Lévy (Meltemi, 2023), la prima traduzione italiana di *Scienza intensiva e filosofia virtuale* di Manuel DeLanda (Meltemi, 2022) e l'ultimo libro di Giuseppe Longo, *Matematica e Senso* (Mimesis, 2021).

Deborah De Rosa è Professoressa Associata presso il Dipartimento di Studi Umanistici dell'Università della Calabria, dove insegna Epistemologia e Filosofia della Scienza. I suoi interessi di ricerca vertono sul ruolo della soggettività nel sapere scientifico e tecnologico, con peculiare attenzione alla dimensione della percezione. Tra i saggi pubblicati si ricordano *Intrecci. Filosofia e psicoanalisi tra Lacan e Merleau-Ponty* (Mimesis 2020) e *Sorvegliare e punire oggi. Epistemologia della penalità contemporanea* (Meltemi 2023); è curatrice dell'edizione critica della prima traduzione italiana integrale di *Psicologia e pedagogia del bambino. Corsi alla Sorbona 1949-1952* di Maurice Merleau-Ponty (Mimesis 2026, in corso di pubblicazione).

Nicola Gianola è dottorando presso l'Università degli Studi di Roma "Tor Vergata". Ha conseguito la laurea triennale all'Università degli Studi di Milano con una tesi su Wittgenstein e il platonismo e la laurea magistrale all'Università Ca' Foscari di Venezia, dove ha proposto una lettura trascendentale della filosofia della matematica di Wittgenstein. Il suo progetto di dottorato si concentra sull'elaborazione di una teoria della comprensione degli enunciati matematici a partire da Wittgenstein. I suoi interessi includono filosofia della matematica, epistemologia, filosofia del linguaggio, filosofia della scienza e metafisica.

Francesco La Mantia è professore ordinario di Filosofia e Teoria dei Linguaggi presso il Dipartimento di Scienze Umanistiche dell'Università degli Studi di Palermo. La sua attività di ricerca si colloca nell'ambito della filosofia del linguaggio e della semiotica, con particolare attenzione ai problemi dell'enunciazione, della significazione e delle invarianti linguistiche. Tra le sue pubblicazioni più importanti figurano: *Che senso ha? Polisemia e attività di linguaggio* (Mimesis 2012), *Pour se faire langage. Lexique élémentaire de la théorie des opérations prédicatives et énonciatives d'Antoine Culioli* (Louvain La-Neuve, 2020) e *Strano Anello. Metamorfosi e Polisemia di un Diagramma* (in collaborazione con Jean-Pierre Desclés, Meltemi 2023).

Albino Attilio Lanciani ha conseguito la laurea in Filosofia presso l'Università degli Studi di Milano e ha poi perfezionato la propria forma-

zione all'Université Libre de Bruxelles, dove ha ottenuto il dottorato di ricerca in Filosofia della scienza con una tesi sull'intuizionismo, sotto la direzione di M. Richir. Alcuni anni più tardi ha conseguito un secondo dottorato di ricerca, ancora in Filosofia della scienza, con una tesi sugli aspetti filosofici della probabilità, sotto la direzione di S. Aurox presso l'École Normale Supérieure di Lione. È autore di quindici monografie, nelle quali i temi trattati sono affrontati dal punto di vista della fenomenologia husserliana.

Domenico Licciardi ha conseguito nel 2025 il titolo di Dottore di Ricerca all'Università della Calabria. Ha curato per la casa editrice Orthotes la traduzione del saggio *La plasticità al tramonto della scrittura* di Catherine Malabou. Ha pubblicato con le case editrici Springer e Mimesis, e su diverse riviste filosofiche italiane. Si occupa prevalentemente di plasticità in diversi ambiti del sapere e in particolare in estetica, in ontologia, in biologia e neurobiologica, e in psicoanalisi.

Lorenzo Marannino è laureato in filosofia presso l'Università La Sapienza di Roma con una tesi intitolata *Genesi e crisi del senso*. Derrida e la fenomenologia di Husserl. Si occupa principalmente di fenomenologia, integrando gli studi husserliani con gli sviluppi fenomenologici in ambito tedesco, francese e italiano. I suoi interessi di ricerca includono inoltre l'idealismo tedesco, la filosofia di Hegel e il decostruzionismo. Le sue ricerche attuali spaziano da problematiche teoretiche, quali la fenomenologia delle idealità, a tematiche politico-morali, in particolare in relazione agli studi sul concetto di "Europa". Ha pubblicato articoli dedicati a Husserl, Derrida e Merleau-Ponty su riviste nazionali e internazionali e partecipato come speaker a convegni internazionali.

Marco Rigoli è professore ordinario di Matematica presso l'Università degli Studi di Milano, dove ha conseguito la laurea in Matematica. Dopo la laurea ha ampliato i propri interessi studiando presso il Dipartimento di Fisica. Due anni più tardi si è trasferito alla State University of New York ad Albany, dove ha ottenuto un Master of Arts. Successivamente è passato alla Washington University di St. Louis, conseguendo il dottorato di ricerca in Matematica. Nel frattempo ha trascorso un anno presso l'Université de Nancy I. Ha quindi ottenuto una borsa di ricerca dall'Engineering and Physical Sciences Research Council del Regno Unito per svolgere attività di ricerca presso la Durham University e la Warwick University; da lì si è trasferito all'International Centre for Theoretical Physics di Trieste, dove ha lavorato come ricercatore per l'IAEA. Dopo un periodo di due anni ha preso servizio presso l'Università di Catania, per poi rientrare a Milano e successivamente

all'Università degli Studi dell'Insubria come professore ordinario, lasciando quest'ultima sede per assumere l'attuale posizione a Milano. Ha ricoperto incarichi come visiting professor presso le università di Murcia, Granada, Amazonas, San Paolo e Ceará, oltre a numerose altre. I suoi principali ambiti di ricerca riguardano l'analisi globale su varietà riemanniane, la geometria riemanniana e le teorie estese della relatività generale. Per molti anni ha organizzato a Milano un seminario di epistemologia dei processi matematici e ha tenuto corsi sullo stesso tema. Attualmente dirige il *Seminario Enriques di storia e filosofia della matematica* presso il Dipartimento di Matematica della Statale. È autore di circa 150 articoli scientifici e di cinque monografie.

Fabio Sterpetti è professore associato di Logica e Filosofia della scienza presso il Dipartimento di Filosofia della Sapienza Università di Roma. È membro del Collegio dei docenti del Dottorato in Filosofia della Sapienza Università di Roma. La sua ricerca si concentra principalmente su alcuni aspetti del dibattito tra realisti e antirealisti in filosofia della scienza. Suoi articoli sono stati pubblicati su diverse riviste, come *Synthese*, *History and Philosophy of the Life Sciences*, *Philosophia*, *Topoi*. Ha pubblicato il volume *La logica del naturalismo: Metafilosofia e filosofia della scienza alla luce della sfida naturalista* (Mimesis, 2021). Ha curato, insieme a Emiliano Ippoliti, il volume *The Heuristic View: Logic, Mathematics, and Science* (Springer, 2025), insieme a Marta Bertolaso, il volume *A Critical Reflection on Automated Science* (Springer, 2020) e, insieme a Emiliano Ippoliti e Thomas Nickles, il volume *Models and Inferences in Science* (Springer, 2016).

Nicola Turrini è assegnista di ricerca in filosofia teoretica presso l'Università di Verona. Si occupa prevalentemente di filosofia della logica e della matematica con particolare attenzione al pensiero di Alan Turing.

Riccardo Valenti (PhD) è un ricercatore e ha conseguito un dottorato di ricerca in filosofia. Il suo lavoro si concentra sulla fenomenologia, la filosofia della scienza e le riflessioni contemporanee sulla tecnologia e il cambiamento climatico.

Ferdinando Zalamea è un matematico e filosofo colombiano, professore presso l'Universidad Nacional de Colombia. La sua ricerca si colloca nell'ambito della filosofia e della storia della matematica e della logica. È autore di numerose monografie e saggi pubblicati presso case editrici accademiche internazionali. È noto in particolare per aver elaborato una Teoria sintetica della matematica, sviluppata attraverso un dialogo sistematico tra matematica contemporanea e riflessione filosofica. Ha inoltre

dedicato studi rilevanti a Charles S. Peirce, Alexander Grothendieck, Albert Lautman e ad alcuni autori chiave della filosofia e della cultura scientifica del Novecento. Tra le sue opere principali si ricordano *Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics* (2012) e *Grothendieck. Una guía a la obra matemática y filosófica* (2019).

Finito di stampare dicembre 2025
da Digital Team – Fano (PU)