

Albino Attilio Lanciani

Marco Rigoli

Quelques remarques phénoménologiques sur la beauté dans les mathématiques

My work always tried to unite the true with the beautiful, but when I had to choose one or the other, I usually chose the beautiful.

Cité par Freeman Dyson in
Obituary for Hermann Weyl *Nature* (10 Mar 1956)

L'ambition de ce travail est de contribuer à la saisie de la beauté dans les mathématiques. Par rapport à d'autres travaux consacrés au même sujet, nous voudrions ici marquer une petite différence : nous n'essayerons pas de donner des interprétations éloignées du monde des mathématiques. Au contraire et de manière plus modeste, ce que nous intéresse est d'interroger les mathématiciens eux-mêmes au sujet de leur travail et de partir, pour notre analyse, de ce qu'ils considèrent beau dans leurs disciplines. En ce sens, lorsque nous leur demandons de clarifier ce que l'on peut entendre par une belle démonstration ou un beau théorème, nous obtenons des réponses diverses. Il faut d'ailleurs préciser dès le début que l'éclaircissement de la question – qu'est ce que la beauté dans les mathématiques ? – n'est pas immédiat, car son sens dépend strictement du lieu conceptuel à partir duquel la même question est posée. La première chose à faire est donc de mieux articuler notre problème, et ensuite, d'indiquer les deux difficultés risquant d'obscurcir notre questionnement dès le début :

1. Le problème des relations entre les mathématiques et un public non mathématique. La plupart des gens trouvent les mathématiques difficiles, compliquées, obscures et – il faut bien l'admettre – un peu arides. Ses secrets ne semblent pouvoir être interprétés que par quelques petits conventicules – *i. e.* les mathématiciens –

qui en connaissent les détails les plus intimes. De surcroît, pour le profane, entendre que les mathématiciens ont aussi des critères esthétiques pour apprécier les résultats de leur discipline est, en même temps, aussi bien surprenant que bizarre.

2. Le problème des relations du mathématicien avec son propre travail. Cela peut sembler étrange, mais d'habitude les mathématiciens ont la même attitude envers leur discipline que les peintres, les écrivains ou les musiciens lorsqu'ils s'expriment au sujet de leur art respectif.

Surtout en considérant ce dernier point, il a été souvent remarqué que les mathématiciens tendent à définir la beauté de leur discipline de manière tranchante. Si on les interroge à ce sujet, d'habitude, ils donnent la définition de la beauté des mathématiques par voie tout simplement prédictive. Au fond, leur manière de répondre peut sembler assez bizarre et habituellement elle se développe, dans la plupart des réponses, en deux phases : d'abord ils donnent une réplique du type : La beauté en mathématiques est. Le lecteur peut remplacer les points de suspension par un adjectif ou un substantif à son gré. Après ils effectuent, très souvent, une sorte de *saut conceptuel* et passent à la description d'un résultat qui leur paraît expliquer le sens de leur définition précédente. Un résultat qui, la plupart des fois, les a surpris et qu'ils essayent d'esquisser en tenant en compte, de manière présomptive, du niveau de connaissance mathématique de leur interlocuteur. Ils soulignent les éléments surprenants ou brillants de ce résultat et après ils reviennent à des définitions qui poussent vers une forme opératoire et souvent achèvent la question en rappelant que les mathématiques regardent au-delà de la beauté¹. Où ? Et là on a une grande difficulté à comprendre.

Au lieu d'une définition, fatalement inadéquate, nous essayerons de parcourir un chemin visant à un autre objectif : nous voudrions donner quelques éléments pour une phénoménologie de la beauté dans les mathématiques. Cette notion peut ainsi être interprétée en deux sens qui – du moins nous l'espérons – à la conclusion de ce travail devraient montrer une certaine convergence : dans un premier sens nous chercherons à montrer comment et où la beauté apparaît dans les mathématiques et aux mathématiciens et, ensuite, nous chercherons à interpréter ces données par les outils donnés par E. Husserl avec quelques éléments théoriques fondamentaux de la phénoménologie. Ces deux sens se présentent d'ailleurs presque toujours fort enchevêtrés.

Notre thèse de début – soulignons qu'il s'agit d'une thèse initiale : il n'y a pas de motivations contraignantes pour lesquelles elle devra rester

¹ Cela est d'autant plus étrange, car la première impression qu'on a est que les mathématiciens aiment discuter de la beauté dans leur discipline.

immuable jusqu'à la fin – peut être résumée de la manière suivante : *la beauté dans les mathématiques est donnée par la présence d'une pluralité de caractères qui peuvent ou bien apparaître tous ensemble ou bien singulièrement, mais en ce cas d'une manière particulièrement brillante.*

1. Premières remarques

Le rôle joué par une quelque forme d'idéal esthétique a été souvent souligné par le mathématicien dans son travail comme l'un des éléments qui conditionne aussi bien les méthodes que les directions dans la recherche mathématique. Le manque de beauté peut parfois indiquer une erreur dans la résolution d'un problème. Parfois ce manque signale qu'une solution satisfaisante doit être encore recherchée. Ainsi s'exprime C.F. Gauss dans ses *Disquisitiones arithmeticae* :

Lorsqu'on découvre un nouveau résultat [...], on ne peut pas [...] considérer la recherches d'autres preuves comme un luxe superflu. Souvent on n'arrive pas à la preuve la plus belle et la plus simple [...]. Pour ces raisons la quête d'une preuve nouvelle pour des vérités déjà connues est importante comme la découverte même.²

Cela exhibe clairement l'une des choses qui semble la plus étrange au non initié aux mathématiques convaincu de leur obscurité : pourquoi insiste-t-on pour prouver à nouveau un théorème qui a déjà été prouvé ?

Pensons par exemple à la suite des preuves du théorème de Pythagore ou, pour rester à C.F. Gauss lui-même, à la preuve du théorème fondamental de l'algèbre. C'est à ce sujet que la réponse de C.F. Gauss est surprenante : souvent une preuve supplémentaire est plus belle que la précédente, mais ce qu'il semble soutenir de manière implicite est que l'idée de beauté joue un rôle qui n'est pas exclusivement esthétique, mais – et cela est pour nous capital – cognitif aussi. Autrement dit, il semble que pour C.F. Gauss disposer d'une preuve plus *belle* implique qu'on en sait plus – notre connaissance est plus adéquate – au sujet d'un résultat démontré. La plus célèbre phrase qui semble bien indiquer ce guide constante de la part de la beauté est vraisemblablement celle de G. Hardy qui écrit :

La beauté est le premier test : il n'y a pas de place permanente dans ce monde pour des mathématiques laides.³

² C.F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, Yale University Press, New Haven, 1966 ; p. 65.

³ G. Hardy, *A mathematician's Apology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1940 ; p. 85.

La beauté et l'élégance ne sont pas des attributs frivoles ou non essentiels d'une théorie mathématiques ou, plus modestement, d'une preuve d'un théorème particulier ; au contraire, les deux contribuent à la manière dont la communauté des mathématiciens regarde la résolution d'un problème et évalue de manière très attentive quelles solutions peuvent être considérées comme les meilleures. Cela nous oblige à établir une différence entre la beauté et l'élégance mathématiques. Nous considérons cette dernière comme la capacité exprimée par un mathématicien d'enseigner ou d'appliquer une certaine théorie d'une manière claire. Autrement dit, clarté d'exposition, concision et rigueur sont synonymes d'élégance. Cela s'exprime le plus souvent dans les manifestations classiques du savoir mathématique : les salles de cours ou les articles. La beauté mathématique est beaucoup moins facile à cerner et, disons-le dès maintenant, on ne peut pas l'enseigner.

La beauté se révèle typiquement sous plusieurs facettes, souvent presque contradictoires. Il y a des éléments que la beauté partage avec l'élégance, par exemple, la brièveté, la clarté, etc. Mais, souvent, elle semble être plutôt une fonction de chaque résultat particulier. Les mathématiciens eux-mêmes ont essayé d'analyser les conditions de la beauté dans les mathématiques à partir de leurs points de vue personnels et l'unique chose sur laquelle ils sont peut-être d'accord est qu'il y a une relation – est-elle exhaustive ? – entre le goût personnel, la période historique et toute la gamme des qualités qui conduisent à décerner à un morceau des mathématiques le titre de beau.

Cela est en effet le problème principal. Comme on le sait, on ne peut pas sous-estimer, dans toute évaluation esthétique, le *background* des sujets impliqués et, plus généralement, le contexte culturel. En effet, pour déterminer ce qui est beau, la culture est déterminante. C'est à l'intérieur d'une certaine culture et par les moyens que cette même culture nous met à disposition que nous caractérisons comme *belle* une de ses productions. Il faut reconnaître que tout phénomène d'expression est encadré à partir de ce milieu commun – la culture qu'une communauté partage – qui conditionne aussi bien ce qu'on considère *beau* dans une culture quelconque et cela aussi bien de manière explicite – dans certaines cultures le thème de la beauté est essentiel – qu'implicite lorsque la culture en question ne vise pas à la beauté comme critère fondamental pour juger de la qualité de ses productions.

D'autre part il est clair que cela est plutôt le signe d'un problème philosophique que sa résolution. L'unique élément sur lequel on peut être d'accord est alors qu'il y a un quelque habitus culturel qui nous pousse à dire qu'une manifestation de l'esprit humain est belle et non triviale. Du point de vue philosophique, nous ne voulons pas expliquer pourquoi une pratique mathématique spécifique peut être définie neuve ou belle, mais,

simplement, décrire la manière de laquelle ces processus de sédimentation s'articulent et participent à la construction du sens.

Sur cette base, nous essayerons de faire un petit tour des critères suivant lesquels un produit mathématique pourra, ou ne pourra pas, être considéré beau par les mathématiciens eux-mêmes. Nous avons choisi de nous situer dans le contexte des mathématiques contemporaines – ou, du moins, du XX^e siècle – pour limiter les problèmes concernant les variations du goût en vertu desquelles certains morceaux des mathématiques autrefois considérés beaux ne le seraient plus aujourd'hui. C'est-à-dire que nous cherchons à adhérer le plus possible à l'horizon actuel de la recherche mathématique dans l'espoir de partager un horizon commun avec les mathématiciens d'aujourd'hui.

Par exemple, G. Hardy considère les critères esthétiques comme quelque chose d'inattendu où l'inévitabilité et l'économie de moyens jouent un rôle dans la détermination de la valeur d'un produit mathématique. Comme il a été souligné par N. Sinclair⁴, on peut considérer l'approche de G. Hardy comme privilégiant un sens évaluatif de l'esthétique. Cela n'empêche pas qu'il y ait d'autres thèses. Pour le montrer, nous donnons de suite deux définitions qui sont, du moins apparemment, plus pragmatiques et opératoires. Pour G.-C. Rota, la beauté en mathématiques consiste dans le pouvoir d'éclaircissement dont dispose un théorème, une preuve, qui nous est offerte par la compréhension de leur contenu :

Nous reconnaissons la beauté d'un théorème si nous voyons comment le théorème « s'installe bien » (« *fits* ») à sa place, comment il jette de la lumière autour de lui-même, comme une *Lichtung* [l'ascendance heideggerienne de ce terme est évidente], une clairière dans le bois.⁵

De son côté, pour H. Poincaré, la beauté a une relation avec le chemin accompli par un raisonnement choisi pendant la résolution d'un problème. Pour lui, la beauté et sa recherche sont responsables de la création de nouvelles idées et de nouvelles perspectives qui ne seraient pas ouvertes par une recherche conduite par voie purement logique.

De fait, nous pourrions énumérer, à la suite des mathématiciens, une longue suite de propriétés qu'un beau morceau de mathématiques

⁴ N. Sinclair, The aesthetic sensibility of Mathematicians, il s'agit du chapitre 4 de [N. Sinclair, D. Pimm, W. Higginson], *Mathematics and the Aesthetic. New Approaches to an Ancient Affinity*, CMS Books in Mathematics, vol. 25; Canadian Mathematical Society, Springer Verlag, 2006.

⁵ G.-C. Rota, Phénoménologie de la beauté mathématique, in *Phénoménologie discrète. Écrits sur les mathématiques, la science et le langage*, Mémoires des Annales de Phénoménologie, Beauvais, 2006, p. 86.

devrait avoir : profondeur conceptuelle, simplicité, clarté, originalité et ainsi de suite. Le résultat en est que nous sommes obligés de reconnaître à la beauté en mathématiques une signification plurivoque ; il s'agit d'un concept articulé et fort raffiné dont l'appréciation complète a besoin d'une connaissance de haut niveau et d'une finesse d'esprit de la part du mathématicien lui-même. Ce fait implique de manière évidente une première réponse à l'une des deux difficultés que nous avons signalées au début : pour un public non formé aux mathématiques, il est impossible d'apprécier les finesses d'une création mathématique tout comme, pour un public également non formé, il est impossible d'apprécier un tableau d'un maître du XX siècle qui paraîtra dépourvu de tout intérêt esthétique.

En ce sens, les mathématiques ne sont pas si différentes des arts en général. Il suffit de réfléchir à ce dont nous avons besoin pour apprécier un produit artistique du siècle qui vient de s'achever tels, par exemple, *Guernica* de P. Picasso ou la *Passacaglia op. 1* de A. Webern. Il n'y a pas beaucoup à faire : afin d'apprécier ces deux produits culturels, il faut avoir parcouru un long chemin. Il faut que nous disposions de la base grammaticale des deux arts que nous sommes en train de considérer, c'est-à-dire qu'il nous faut posséder les éléments principaux du langage musical et du langage pictural. En nous limitant à la musique, il nous faut imaginer ce qu'est une danse du dix-septième siècle – la *Passacaglia* – le chemin qu'elle a parcouru pour être intégrée à la tradition musicale, la manière par laquelle elle s'est imposée, par exemple dans l'œuvre de J.-S. Bach, comme la structure de base pour une suite d'élaborations artistiques successives. De surcroît, tout cela n'est pas encore suffisant : il nous faut aussi saisir comment une structure codifiée peut jaillir à nouveau et être recodée à partir de règles musicales (règles grammaticales) nouvelles. Seulement à partir de cet instant peut apparaître l'une des composantes essentielles de l'expérience esthétique : la sensibilité aux nouvelles applications créatives dont A. Webern nous donne une démonstration lumineuse. Certainement cette manipulation linguistique n'est pas l'unique composante de la beauté, mais elle joue un rôle important : la beauté de la *Passacaglia op. 1* concerne aussi la manière d'appliquer les règles consolidées par une tradition que par là même elle permet de dépasser. La grammaire établie devient un langage créatif et cela est commun à toute production esthétique significative.

2. La recherche de la beauté

Lorsqu'un mathématicien travaille sur un problème spécifique, il n'est certainement pas concerné, en premier lieu, par la quête de la beauté. La

première preuve d'un résultat non trivial est rarement belle et, en général, elle ne présente pas des éléments pourvus d'un *appeal* particulier.

Cependant, comme nous l'avons déjà dit en discutant des remarques de C.F. Gauss, il est évident qu'il y a une forme d'attitude compulsive par laquelle on recherche des nouvelles preuves ou, du moins, une meilleure compréhension du résultat lui-même. Pendant ce processus, on découvre des nouveaux éléments et, souvent, des nouveaux faits qui méritent le qualificatif de beaux. Les deux prochains exemples soutiennent cette thèse. Le premier est sans doute bien connu, mais il nous donne la possibilité de citer certaines opinions sur ces questions qui nous ont été délivrées par J.J. Kohn lors d'une conversation d'il y a quinze ans⁶.

Considérons, à ce sujet, le théorème fondamental de l'algèbre et soit un polynôme à coefficients complexes :

$$p(z) = z^n + \sum_0^{n-1} a_j z^j$$

et avec $n \geq 1$, alors il y a des nombres complexes, $z_1, \dots, z_n$ tels que:

$$p(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n).$$

Il s'ensuit immédiatement que le problème est équivalent à la recherche d'un $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $p(\alpha) = 0$; c'est-à-dire qu'il existe une racine du polynôme. Le problème est algébrique, mais sa résolution a besoin de sortir des limites de l'algèbre et cela, à certains égards, pourrait être considéré une première source d'insatisfaction : pour une quelque sorte de *cohérence interne* on voudrait qu'un problème algébrique soit résolu de manière algébrique.

Cela explique pourquoi la première preuve rigoureuse de C.F. Gauss était assez baroque et, il faut bien l'avouer, plutôt *laide* selon l'opinion du même C.F. Gauss.

La recherche d'une preuve plus belle a impliqué d'autres parties des mathématiques dans un approfondissement conceptuel concernant aussi bien ces mêmes autres champs mathématiques que le théorème lui-même qu'il fallait (re)-démontrer. Pour s'en faire une idée, considérons l'argu-

⁶ Nous avons remercié vivement J.J. Kohn, à l'époque, d'avoir bien voulu nous concéder le droit de citer cette conversation, mais aussi une lettre de sa part discutant de manière très fine certains caractères de la beauté dans les mathématiques. Précisons, pour les seuls non mathématiciens bien sûr, que J.J. Kohn professeur à Princeton a été unanimement reconnu comme l'un de plus grands spécialistes au monde de l'analyse complexe.

mentation suivante basée sur le théorème de Liouville affirmant qu'une fonction bornée et entière et holomorphe sur $\mathbb{C}$ est constante.

Le raisonnement est par contradiction. En premier lieu, nous observons que $|p(z)| \rightarrow +\infty$ avec $|z| \rightarrow +\infty$. En ce cas si $p(z)$ n'a pas de zéros, la fonction $1/p(z)$ est bien définie, bornée et holomorphe sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire entière. D'ailleurs, par le théorème de Liouville, il s'ensuit une contradiction pour $n \geq 1$. Citant une lettre de J.J. Kohn :

À partir du point de vue de quelqu'un qui est familier avec les concepts de base de l'analyse complexe la [...] preuve est vraiment belle parce qu'elle montre de manière immédiatement conséquente (*straightforward*) le chemin par lequel le résultat s'ensuit de choses que l'on connaît déjà. C'est ce que j'entendais indiquer lorsque j'ai dit que la preuve de Gauss était bellissima (en italien dans le texte). D'autre part, on peut aussi remarquer que pour établir ces mêmes concepts familiers dans l'analyse complexe on a parcouru un autre long chemin. Le théorème de Liouville s'ensuit de la formule intégrale de Cauchy pour les dérivées et cela dépend du théorème de Cauchy qui est assez raffiné.

Faisant un pas de plus on peut concevoir – à l'aide de la géométrie – une preuve plus simple du théorème de Liouville par le biais du Lemme de Schwarz, c'est-à-dire par un milieu géométrique comme il a été fait par L. Ahlfors. Il s'agit d'un point déterminant : l'emploi d'un nouveau point de vue augmente la connaissance et donne une nouvelle lumière à la question. Il est aussi intéressant – et cela se manifeste clairement dans le texte de J.J. Kohn que nous venons de citer – que la compréhension personnelle du problème est influencée par l'héritage culturel, par le *background* mathématique dont chaque mathématicien dispose et ainsi de suite.

Au seul but de montrer une simple manifestation de cette thèse, considérons la variation suivante de la preuve pythagoricienne de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Soit $p^2 = 2q^2$ avec p et q naturels. Lors de la factorisation en nombres premiers de p^2 et q^2 le même nombre premier doit apparaître aussi bien pair qu'impair. Il s'agit évidemment d'une contradiction. Peut-être que nous préférons cette démonstration par rapport à l'usuelle, mais elle dépend strictement du théorème de factorisation en nombres premiers qui fait tout naturellement partie du *background* habituel d'un mathématicien de notre époque. Ces considérations rapides nous permettent d'obtenir quelques nouveaux éléments pour mieux comprendre le sens de notre travail : en fait, et il s'agit là de notre nouvel élément, il ne s'agit pas de choisir une telle ou une telle autre procédure qui peut, ou non, guider notre quête d'une clarté mathématique, mais il est également évident qu'il y a quelque chose comme un goût qui joue un rôle de conditionnement par rapport à tout choix que nous pouvons effectuer. En ce

sens, le goût n'est pas seulement relié au choix d'une preuve ou d'une autre, mais est aussi enchevêtré à l'*a priori* structurel qui conditionne déjà la compréhension du problème à résoudre lui-même.

Le texte précédent de J.J. Kohn et les considérations que nous venons de développer, nous suggèrent l'introduction d'un nouvel élément analytique : une sorte de précompréhension du sens des mathématiques qui constitue l'horizon des développements qui peuvent ou non suivre. La structure en jeu doit être d'ailleurs prise au sens dynamique au sens où les différentes tensions jouent toutes au même temps. C'est-à-dire qu'il s'agit d'une sorte de structure *quasi-dialectique* (ou hyperdialectique, si l'on écoutait M. Merleau-Ponty⁷) dans laquelle toutefois *thèse* et *antithèse* ne confluent jamais – sous peine d'en supprimer le mouvement structurant – dans une synthèse finale : d'un côté nous avons cette précompréhension qui nous conduit dans la position du problème et dans la quête des bonnes résolutions suivant un certain chemin, de l'autre côté, le goût nous porte à considérer certaines démonstrations comme plus appropriées, plus conséquentes, plus concernées et ainsi de suite. Bref, des démonstrations qui sont, tout simplement, plus belles. Il s'ensuit clairement que tout acte mathématiquement créateur est l'expression, la concrétisation d'un style. De quoi s'agit-il ?

Une des réponses, poétique à l'apparence, mais capable de rendre possible plusieurs points de contact entre des expériences créatrices différentes a été donnée par M. Merleau-Ponty :

Le style est chez chaque peintre le système d'équivalences qu'il se constitue pour cette œuvre de manifestation, l'indice universel de la *déformation cohérente* laquelle il concentre le sens encore épars dans sa perception et le fait exister expressément.⁸

Il y a plusieurs éléments dans ce texte qui peuvent nous aider pour mettre mieux sous le feu de l'analyse notre problème. Le *style* dans les mathématiques se manifeste en filigrane à la constitution des objets de ces disciplines déjà pour ce qu'on pourrait nommer un choix opératoire. C'est-à-dire que le chemin pour créer et explorer est pavé par le style et que, plus précisément, la manière pour explorer les horizons des mathématiques qui conduit à l'existence des nouveaux objets est conséquente à un choix stylistique. En fait, ce chemin n'est pas fait au hasard. Il est une *déformation cohérente* qui nous permet de structurer, avec aussi un effet

⁷ M. Merleau-Ponty, *Le visible et l'invisible*, coll. TEL, Gallimard, Paris, 1984.

⁸ M. Merleau-Ponty, *Le langage indirect et les voix du silence*, in *Signes*, NRF Gallimard, Paris, 1985 ; p. 68.

en retour, le sens des mathématiques comme de toute autre science. De quoi dépend alors un choix mathématique ou un autre ?

Il dépend de plusieurs éléments de l'histoire idéale des mathématiques. Il dépend du goût, des projets en jeu, de la volonté du sujet concrètement pris à l'acte créatif impliqué par un projet mathématique. D'une manière plus technique, la notion a été approfondie par M. Richir⁹ qui, à ce sujet, introduit le concept de tautologie symbolique. Peut-être que la proposition apparaît plus lourde, mais elle permet d'éclairer certains points du choix que nous ferons dans une direction légèrement divergente. En fait, pour quelqu'un concerné habituellement par les mathématiques, parler de *tautologie symbolique* et non de *tautologie logique* est très significatif¹⁰. Qu'entendons-nous par là ?

Tout d'abord nous retrouvons une différence par rapport à ce qu'on affirme ou qu'on comprend à notre époque de la logique mathématique. Pour cette dernière, une tautologie logique est une formule vraie pour toute attribution de valeur de vérité aux symboles qui la composent. La notion opposée est bien sûr celle de contradiction : une formule fausse pour toute attribution de valeur de vérité à ses symboles. La notion de *tautologie symbolique* est, par rapport à ce qui précède, une forme d'articulation technique de la notion de *style* proposé par M. Merleau-Ponty. Elle nous permet d'éclairer trois points :

1. la *tautologie symbolique* n'est pas une *tautologie logique*. Cela au sens où elle est vraie, mais non au sens où elle est vraie pour toute attribution de valeur de vérité. Elle est vraie en raison du fait que la *déformation cohérente* la caractérisant est, *ipso facto*, constitutive et une sorte de *balisage* identifiant un parcours de sens possible.
2. Exactement pour les raisons qu'on vient d'exposer, chaque *tautologie symbolique*, éventuellement coordonnée avec des autres, contribue à la création d'un monde.
3. En quelque sorte, la notion *tautologie symbolique* permet de généraliser la notion de style. Cela au sens où le concept de style suggère un élément plus lié à la libre activité intellectuelle d'un sujet créateur, tandis que la notion de *tautologie symbolique* nous paraît plus apte à inclure aussi les caractères de *déformation cohérente* que l'on peut attribuer à une culture dans sa globalité.

Laissons pour plus tard quelques mots sur ce que signifie créer un monde et concentrons-nous sur ce que cette notion de *déformation co-*

⁹ En particulier nous nous référons à M. Richir, *L'expérience du penser. Phénoménologie, philosophie, mythologie*, J. Millon, Grenoble, 1996.

¹⁰ Il est clair que cela aussi est une explication en acte du sens précédemment exploré de la notion de *style*. Évidemment la notion de *tautologie symbolique* parle différemment à quelqu'un qui se mesure habituellement avec la logique mathématique.

hérente nous permet de comprendre, toujours par rapport à la logique : l'emploi d'un langage est toujours créatif et il obéit à des critères de *consistance* qui ne coïncident pas avec ceux de la logique mathématique. Ils sont plutôt des critères d'une logique de la création esthétique. Cela marque l'éloignement de toute interprétation logique *via* les prédicats vrai ou faux avec lesquels nous appliquons des labels aux constructions grammaticales du langage : toute activité symboliquement créatrice est *de facto* une déformation au sens strict. C'est-à-dire au sens où l'espace de création n'est pas nécessairement isotrope. Pour souligner ultérieurement la distance sidérale d'une interprétation pour ainsi dire algorithmique des mathématiques, nous affirmons que toute création symbolique – donc mathématique aussi – est une *déformation cohérente* qui se relie et établit des comparaisons avec d'autres *déformations cohérentes*. À ce sujet, il est intéressant de remarquer que nous pouvons confronter ces *déformations cohérentes* : par exemple, je regarde un produit artistique de la Renaissance et je suis capable de le distinguer d'un autre produit artistique, disons de l'époque baroque. Cela peut sembler une remarque triviale, car il est certain que les œuvres de Michel-Ange et de Raphaël se ressemblent, bien plus qu'elles ressemblent à celles de H. Matisse. Les compositions de J. Brahms et de R. Schumann se ressemblent plus entre elles qu'elles le font avec les créations de Guillaume de Machaut ou de A. Webern. C'est-à-dire qu'il y a quelque chose comme une famille de *déformations cohérentes* qui peuvent être regroupées par une sorte de communauté d'ententes, dans un ensemble d'évaluations conceptuelles qui dépendent toujours du caractère non isotrope de l'espace de la création. Essayons de poser les mêmes questions dans les milieux des mathématiques : peut-on affirmer, en ce sens, que les productions culturelles, les manières de penser, même les objets de recherche de A. Cauchy ressemblent à ceux de J.B.J. Fourier ? En revanche, peut-on soutenir qu'il y a une différence abyssale, pour ce qu'en est des caractères qu'on vient de mettre en évidence, entre des auteurs comme Euclide ou H. Lebesgue ?

Cela pose un problème ultérieur : il est, semble-t-il, légitime, comme nous venons de le faire, de mettre des mathématiciens en relation entre eux, mais pourquoi pouvons-nous le faire ? De manière encore plus générale, pourquoi pouvons-nous établir des relations entre des *créateurs symboliques* appartenant à des milieux différents ?

En fait, si nous retrouvons des éléments communs qui orientent la créativité des artistes ou des mathématiciens, il nous faut admettre une généralisation de la notion de *style*. Cela est dû à la possibilité d'utiliser la notion de *tautologie symbolique* introduite, en ce sens, au point 3 de l'énumération précédente. Autrement dit, nous pouvons confronter les différents *créateurs symboliques* parce qu'ils font parties d'une même

culture, d'une même *institution symbolique*¹¹ qui, par les *tautologies symboliques* qui l'axent à chaque moment, justifie certaines procédures créatives et aussi, plus généralement, de certaines manières de penser. Cela participe à la définition d'une époque, et rend possible la généralisation de cette communauté d'ententes à toute une discipline, à toute une institution symbolique. Participer à la caractérisation culturelle d'une époque veut dire agir à l'intérieur du champ conceptuel axé par les différentes *tautologies symboliques* qui articulent les possibilités évolutives de chaque *institution symbolique*. D'ailleurs, les différentes *tautologies symbolique* varient au long de l'histoire, elles ne sont pas fixées pour toujours et cela implique également que les *institutions symboliques* ne sont pas des blocs de marbre, elles tissent et retissent au cours du temps ce qui en fait partie et ce qui en exclu. Cela vaut aussi bien pour les éléments définis à l'intérieur de chaque *institution symbolique* aussi bien de manière explicite qu'implicite. Par exemple, de manière explicite, dans le milieu des mathématiques, on peut indiquer si un certain type de démonstration est adéquat ou non. Pour ce qui concerne les critères non explicites, nous le savons déjà : chaque époque mathématique a des critères pour définir la beauté, mais il est assez difficile de les indiquer. Quoi qu'il en soit, il est clair que les *tautologies symboliques* peuvent se modifier tout au long de l'histoire et qu'elles jouent une sorte de fonction de médiation entre l'individu – le mathématicien ou, plus généralement, le créateur symbolique – et la globalité de l'*institution symbolique*. À cette fonction, il nous faut ajouter que les mathématiques sont, suivant cette perspective, au croisement entre plusieurs *styles* individuels, entre plusieurs *déformations cohérentes* et cela aussi bien entre des *tautologies symboliques* et des *déformations cohérentes* plus pertinemment mathématiques que, plus généralement, des *tautologies symboliques* extérieures aux mathématiques proprement dites.

Dans la perspective des différentes *institutions symboliques*, nous pouvons bien saisir que chaque discipline créative – et non seulement *créative* – identifie une *institution symbolique* et les rapports entre les différentes cultures sont sans doute fluides, mais en même temps réciproquement structurants. C'est en vertu de cela que, pour ce qui fait l'objet de notre étude, la séparation des mathématiques du tronc de l'*expérience complète* d'un individu ou d'une époque est une abstraction. Certes, une abstraction nécessaire pour en isoler certains éléments structurels, mais dont il faut toujours conserver la trace sous peine de ne pouvoir pas don-

¹¹ Il s'agit de la locution utilisée en phénoménologie comme traduction de l'allemand *Stiftung*. Parfois le même mot est traduit par *instauration*. De toute façon, c'est la manière de traduire, dans le jargon phénoménologique, ce que jusqu'à maintenant nous avons appelé *culture*.

ner raisons de certains éléments impliquant une réflexion plus générale. Ces remarques permettent de fermer la boucle car, dans ces éléments au caractère plus général, il y a aussi l'établissement des critères capables d'encadrer la beauté dans les mathématiques. Autrement dit, l'un des éléments les plus importants pour essayer de comprendre certains points cruciaux de toute *institution symbolique* est une connaissance approfondie de l'histoire de la discipline qu'on est en train d'étudier. Et cela sous peine de rendre obscur aussi – entre autres choses, bien sûr – la compréhension des caractères esthétiques d'une discipline quelconque. À ce sujet l'une des expressions plus claires est due à J. Dewey qui, en écrivant de l'art – nous croyons que l'analyse des critères esthétiques est valable, en principe, pour toute discipline – fait remarquer que :

Lorsque les objets artistiques sont séparés des conditions de leur origine et de l'expérience, un mur est édifié autour d'eux qui les rend opaques dans leur signification générale avec laquelle se mesurent les théories esthétiques.¹²

Du point de vue programmatique, il est alors clair que pour analyser l'expression de la beauté dans les mathématiques, nous avons besoin de plusieurs éléments provenant aussi bien des mathématiques que de la philosophie. Cela au sens où le rôle capital doit être assumée par un croisement multiple entre études historiques, textes mathématiques et expérience mathématique de première main afin de construire une philosophie des mathématiques sensible à la réalité de ce qui se passe concrètement en elles.

À la suite de ce qu'on vient de fixer, le moment est venu d'indiquer une autre propriété dont disposent les *institutions symboliques*, cette fois considérées comme le *lieu symbolique* où s'expriment les différents créateurs symboliques. En effet, bien que chaque *institution symbolique* est une structure dont l'espace interne est non isotrope et où les axes créatifs sont assurés et tendus par les différentes *tautologies symboliques*, le point crucial est que ces *tautologies symboliques* sont coordonnées entre elles et donnent lieu à ce qu'on peut définir une *coordination harmonique*. Qu'il s'agisse d'une pluralité structurelle de *déformations cohérentes* valables, en principe, pour toute *institution symbolique*, ne change rien au fait que c'est au cœur de cette *coordination harmonique* que le créateur symbolique est appelé à agir. Et c'est bien ce nouveau terme – *harmonique* – qui doit retenir toute notre attention. L'utilisation du terme d'*harmonie* n'est pas si innocente : encore une fois nous empruntons un terme spécifique d'une autre activité créatrice – la musique – et l'employons pour mettre en évidence une sorte d'agran-

¹² J. Dewey, *Art as Experience*, Berkeley Publishing Group, New York, 1992 ; p. 3.

dissement du pouvoir créatif par rapport à la simple construction individuelle qui, par ce biais, pourrait être considérée comme le *développement mélodique*. Il est évident, pour rester à l'intérieur de cette métaphore expressive, que la *mélodie*, comme un théorème, fait déjà du sens en tant que *déformation cohérente*, car elle définit, déjà du point de vue intuitif, une unité pourvue d'un sens. Or, la question est que cette unité de sens sera lue à l'intérieur d'une *institution symbolique*. Autrement dit, cette unité peut être agrandie, rendue plus compréhensive par un emboîtement progressif de *déformations cohérentes*. Comme dans un jeu de *matrjoškas*.

C'est cette progression de déformation, cette amplification d'horizon que nous entendons indiquer comme sens primitif de l'utilisation que nous faisons de la notion d'*harmonie*. Nous venons d'écrire d'un *sens primitif*, car il faut saisir que, en quelque sorte, la compréhension harmonique ira se manifester de plusieurs manières en multipliant les renvois internes entre travail individuel du mathématicien, sens de ce travail à l'intérieur d'une théorie spécifique et rapport à la globalité des mathématiques elles-mêmes, entendues cette fois précisément comme *institution symbolique* des mathématiques. De cet enchevêtrement multiple, nous en avons des traces un peu partout dans la manifestation de la créativité mathématique. Or, cette coordination complexe se reproduisant sur plusieurs niveaux conceptuels a aussi une signification esthétique. Il suffit de ces mots de S. Mac Lane au sujet du concept de preuve pour saisir de manière vivante ce rapport entre les deux moments *harmonique* et *mélodique* :

Une preuve n'est pas seulement une suite de paliers individuels, mais un groupe de paliers toujours accordés à un plan ou à un projet définis [...] Nous affirmons par là que toute preuve mathématique a une idée directrice qui détermine tous les paliers individuels et qui peut être considérée comme le plan de la preuve.¹³

La quête de l'idée directrice conduit d'ailleurs S. Mac Lane à se poser des questions sur des problèmes de fondation. Et de là il s'ensuit, presque de manière automatique, l'idée qu'une fondation logique correcte devrait pouvoir être utilisée avec profit par la pratique mathématique. Ces considérations simples risquent cependant de nous faire ignorer – et peut-être d'encourager – deux incompréhensions dangereuses par rapport aux deux termes que nous venons d'introduire :

¹³ S. Mac Lane, *Abgekürzte Beweise in logik Kalkul* (thèse de Doctorat), Georg August Universität zu Berlin, Göttingen, 1934. Publié en anglais in [I. Kaplanski éd.] *Saunders Mac Lane Selected Papers*, Springer Verlag, New York, 1979 ; pp. 60-61.

1. Le problème de la fondation logique d'une partie des mathématiques ou des mathématiques en leur globalité.
2. Le problème de comprendre ce qu'il faut entendre sous le titre de pratique mathématique.

Nous commençons par le deuxième problème, car il est plus aisé à déterminer. Après tout, il n'y a qu'une manière pour caractériser proprement l'activité d'un sujet dans son champ de recherche et cela est la clé de compréhension de la notion de pratique. C'est-à-dire que par pratique mathématique nous entendons l'activité concrète d'un mathématicien dans son champ spécifique de recherche. On est donc très loin de toute idée d'une application pratique des mathématiques. Nous sommes dans une situation tout à fait comparable à celle où nous retrouvons le peintre ou le musicien lorsqu'ils sont aux prises à la tentative de résoudre un problème spécifique de leur art. Dans une pratique créatrice, donc aussi dans une pratique mathématique, le sens des opérations créatrices accomplies ne quitte jamais le milieu de la discipline et demeure toujours, pour ainsi dire, une affaire interne.

En revanche, le problème qui apparaît lorsqu'on s'interroge sur un nouveau projet de fondation pour les mathématiques est énormément plus délicat. Ce serait une grosse erreur de considérer cette phrase en contradiction avec nos affirmations précédentes au sujet de la logique mathématique. L'erreur est due, à notre avis, à la superposition entre deux significations du même terme qui doivent être gardées bien distinctes : le terme en question est *consistance*. Comme il est bien connu, la *consistance* est une propriété nécessaire pour construire un système au sens logico-mathématique. Elle caractérise l'impossibilité de dériver des contradictions à partir de l'ensemble des axiomes et des règles d'inférence admises. C'est-à-dire qu'il y a la nécessité de la non inconsistency pour les systèmes logiques répertoriés par la tradition, mais cela ne touche pas une autre signification du mot *consistance*, une signification beaucoup plus importante, du moins selon notre point de vue. En relation à notre point de vue, la *consistance* est en fait une propriété de la *déformation structurelle* – souvenons-nous des mots que M. Merleau-Ponty attribue à la *déformation cohérente* – qui doit caractériser toute activité créatrice. Selon notre interprétation cette notion de *consistance* ne signifie rien d'autre que la constatation qu'un acte créateur – en tant qu'acte linguistique – est *ipso facto* un acte faisant du sens. Un acte créatif n'est pas du babillage, mais une opération *consistante* qui édifie une unité ouverte pourvue d'une signification qui est immédiatement mélodique, comme nous l'avons introduit précédemment. À notre avis, il y a eu une superposition entre ces deux sens du mot *consistance*. Cela n'empêche pas que nous ne proposons aucunement le remplacement de la notion logico-mathématique de *consistance*, nous proposons tout au plus de

l'intégrer à un plan plus ample de compréhension. Comment le faire ? Dans quelle direction ?

Pour le moment nous pouvons nous contenter d'une observation assez triviale : dans une nouvelle théorie de fondation des mathématiques, il y a une *déformation cohérente* de grande échelle comportant une structuration harmonique d'ordre supérieur par rapport à ce que nous avons étudié jusqu'à présent. Rien de plus, mais aussi et de toute évidence, rien de moins. Or cela concerne, comme dans toute le reste des sciences de l'esprit, un grand et profond renouvellement historique. La *consistance* aussi est une fonction qui doit être comprise dans une multiplicité de possibilités significatives, de chemins conceptuels caractérisant une ou plusieurs époques, d'entrecroisements de goûts et, pour finir, une idée de *consistance* qui concerne de près une évaluation esthétique.

Cela, pour rester à notre utilisation des termes empruntés à la musique, nous permet d'approfondir les richesses de ce que nous entendons par *harmonisation*. Par ce biais, nous pouvons observer un premier effet en retour. Cet effet consiste dans l'utilisation d'une propriété revenant à certaines *déformations cohérentes* au moment où on se rend compte qu'elles peuvent être intégrées de plusieurs manières – introduisant un nouveau sens de *déformation cohérente* – à la structure immédiatement supérieure, tout comme une petite *matrjoška* peut rentrer dans celle qui est juste un petit peu plus grande. Pour le comprendre pleinement revenons aux travaux de S. Mac Lane immédiatement postérieurs à ce que nous avons cité précédemment du même auteur.

Venons-en donc à l'un de pivots de l'algèbre abstraite, la notion d'anneau et considérons une seule application très connue pratiquée sur ces structures : le fait qu'en $\mathbb{Z}$, l'anneau des nombres entiers, a et b sont dit être congrus modulo 7, par exemple, et nous écrivons $a \equiv_7 b$, si $a - b$ est divisible par 7.

Une possibilité pour définir le groupe quotient $\mathbb{Z}_7$ des nombres entiers modulo 7 est de considérer la relation d'équivalence $\equiv_7$ et définir $\mathbb{Z}_7$ comme l'ensemble de classes d'équivalences distinctes. L'ensemble $\bar{a}$ dénote alors la classe contenant a . En $\mathbb{Z}_7$ il y a exactement sept éléments $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{6}$. Les opérations sont bien définies en utilisant celles représentatives ; par exemple $\bar{1} + \bar{4} = \bar{8} = \bar{3}$. Il faut remarquer que le signe $+$ qui apparaît à gauche dans la nouvelle opération en $\mathbb{Z}_7$, tandis que le signe $-$ en $\bar{8} = \bar{3}$ est l'opération $-$ en $\mathbb{Z}$ de manière telle que $\bar{8} = \bar{3}$ est la classe $\bar{5}$. Les éléments de $\mathbb{Z}_7$ sont des sous-ensembles de $\mathbb{Z}$. Une autre manière de définir $\mathbb{Z}_7$ est d'affirmer que ses éléments sont les nombres entiers habituels, mais qu'avec $\equiv_7$ nous indiquons un nouveau type d'égalité. Dans ce cas aussi $\mathbb{Z}_7$ a exactement sept éléments distincts. En accord avec S. Mac Lane :

Un groupe quotient G/N (N normal en G) peut être décrit ou bien comme un groupe dont les éléments sont des co-ensembles de N in G , ou bien comme un groupe où les éléments sont les éléments de G et l'égalité est la congruence modulo N . [...] Nous suivrons ce deuxième point de vue, et regarderons un groupe G comme un système d'éléments pourvu d'une égalité réflexive, symétrique et transitive telle que logiquement les éléments identiques sont égaux (mais non nécessairement la réciproque) et telle que les produits d'éléments égaux soit égal.¹⁴

Les exemples pourraient se multiplier, mais l'élément capital reste le même : une compréhension nouvelle d'une unité – d'une *déformation cohérente* – et son insertion harmonique dans le même tissu conduit à un agrandissement des connaissances et propose à nouveau une *déformation cohérente* d'ordre supérieur. Exactement comme dans le jeu des *matrjoškas* que nous avons évoqué. En ce sens, réfléchir à la pratique mathématique consiste à comprendre l'activité d'un mathématicien lorsqu'il considère la théorie de l'intégration selon Lebesgue et ne fait pas de distinctions entre des fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle. En ce sens le problème n'est pas des moindres quant à l'extension de choses qu'il touche : il suffit de se souvenir que, par exemple, un ensemble de mesure nulle peut avoir un nombre infini de points. Tous les ensembles de cardinalité $\aleph_0$ sont en effet de mesure nulle dans $\mathbb{R}$.

Ces réflexions suggérées par les analyses de S. Mac Lane rencontrent la difficulté de l'extrême concision de cet auteur. Nous croyons cependant que ces suggestions nous sont nécessaires pour mener à bien notre effort. Il nous faut donc les intégrer par des nouveaux concepts et telle est la tâche de la prochaine section.

La beauté que le mathématicien rencontre dans son travail

Comme l'écrit G.-C. Rota dans la première section de son article Phénoménologie de la beauté mathématique :

Tandis que les peintres et les musiciens sont probablement embarrassés par les références à la beauté de leur travail, les mathématiciens aiment les discussions à propos de la beauté des mathématiques. [...] Les artistes professionnels soulignent plutôt les aspects techniques que les aspects esthétiques de ce qu'ils font. Les mathématiciens, au contraire, sont pris par la passion de porter des jugements sur la beauté de leurs champs mathématiques favoris.¹⁵

¹⁴ S. Mac Lane, Groups, Categories and Duality, in *Proceedings of the National Academy of Sciences*, n. 34, 1948, pp. 263-267. La citation est aux pp. 265-267. Il faut remarquer que pour la suggestion de cette idée, S. Mac Lane cite O. Haupt, *Einführung in die Algebra*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 2 voll. ; 1929 en soulignant qu'il s'agit d'un texte injustement oublié.

¹⁵ G.-C. Rota, Phénoménologie de la beauté mathématique, in *Phénoménologie discrète. Écrits sur les mathématiques, la science et le langage*, op. cit. ; p. 77.

Nous pouvons poursuivre en établissant quelques analogies, comme le fait par exemple, M. Atiyah¹⁶ dans un travail récent. La première distinction à faire concerne la distinction entre un moment global et un moment local. Le premier, au sens large, concerne le développement d'une théorie, le deuxième par un thème plus limité, peut-être un détail. Cela propose à nouveau ce que nous avons introduit précédemment au sujet d'une attitude *harmonique* et d'une *mélodique*¹⁷. Le problème est difficile et, au seul but d'en éclairer les contours, nous pouvons penser au déroulement d'une symphonie classique. Dans une symphonie, nous disposons d'une pluralité de lignes mélodiques – au fond, tout comme dans une théorie mathématique ou dans un résultat assez complexe – qui sont structurées dans l'unité de chaque mouvement, mais la progression significative de tout cela ne s'arrête pas pour autant : une symphonie n'est réussie que lorsque les mouvements eux-mêmes s'enchevêtrent dans une structure unitaire, se composent dans une *déformation cohérente consistante*. Pour nous éclairer, à ce niveau analytique, nous nous situons à la lisière entre les lignes mélodiques donnant l'ourdi du mouvement et le même mouvement entendu dans sa globalité, comme pourvu d'un sens. Et à ce point on n'a pas encore terminé, car il faut encore développer le travail interprétatif nécessaire pour passer de l'unité d'un mouvement à l'unité de la symphonie elle-même. Tout en restant à la métaphore choisie par M. Atiyah, on peut comprendre que la théorie peut être admirée par exemple en raison de son importance, développement et applications ; bref en la regardant comme une structure architectonique. Les aspects locaux révèlent leur intérêt par exemple dans une démonstration courte d'un théorème, comme peut l'être la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ ou de π .

Toujours à un niveau encore assez métaphorique, il est clair que la création d'une théorie fait plus penser à l'activité d'un architecte, tandis que les *belles preuves* – où l'on admire la beauté de certains détails – révèlent plutôt la maîtrise d'un artisan.

Une belle cathédrale a aussi bien une structure qui nous saisit que des détails délicats. Une grande théorie mathématique devrait être belle autant à grande qu'à petite échelle.¹⁸

L'idée ainsi introduite est stimulante et, de fait, elle s'arrange bien avec ce que nous avons observé jusqu'ici dans les mathématiques, mais il nous

¹⁶ M. Atiyah, Mathematics : Art and Science, in *Bulletin of AMS*, n. 43, 2005 ; p. 87-88.

¹⁷ Les deux milieux sont fondamentalement identiques. La différence, s'il y en a une, est de nature dynamique. Le rapport local-global est plus d'ordre statique, tandis que le rapport harmonique-mélodique est d'ordre intuitivement plus dynamique étant lié à la temporalité comme milieu conceptuel où ce rapport se déroule effectivement.

¹⁸ *Ibidem*, p. 87.

faut être capables d'agrandir les limites de la métaphore et de la compléter. En fait, les deux termes-limites qui ont été proposés – l'architecte avec son projet d'une cathédrale et, de l'autre côté, l'artisan responsable des petits détails – convergent vers une forme commune.

Notre thèse est donc que l'architecte et l'artisan sont deux représentations-limites : les deux points extrêmes des deux horizons créateurs qui sont séparés de manière plus facile d'un point de vue théorique que pratique. Après tout, l'unité des mathématiques est essentielle pour leur compréhension.

Si l'on réfléchit un instant aux exemples précédents, il nous semble évident que la question d'une nouvelle fondation des mathématiques concerne de plus près l'architecte que l'artisan. Peut-être que dans cette direction on pourrait plus proprement parler d'une architecture majeure ou d'un nouveau plan urbanistique. Or, le fait le plus surprenant est que cela n'est pas si direct qu'il apparaît à première vue. En effet, la proposition d'un nouveau quartier dans la ville des mathématiques ou le fait de penser à nouveau toute la ville selon un nouveau plan régulateur naissent souvent à partir de problèmes qui ne semblent concerner, à première vue, que des détails.

Cela est une preuve évidente de la vie intrinsèque des mathématiques et de la nature extraordinairement complexe qu'elle manifeste. C'est-à-dire que l'un des éléments constitutifs de sa tenue architectonique est dans cette sorte de structuration cachée de ses renvois internes. D'autre part, l'un des éléments les plus caractéristiques qu'on peut découvrir dans ce rapport entre architecte et artisan est dans la possibilité, pour ces deux rôles, de produire des créations qui ont l'étrange capacité d'avoir des effets inattendus. Évidemment chacun de ces résultats diminue son effet (et son importance aussi) de plus en plus qu'on s'éloigne de son champ typique d'application, de son milieu, mais cet effet ne descend jamais à zéro et parfois, nous le verrons d'ici peu, il va établir des liaisons complètement inattendues dans des milieux à l'apparence très distants. Nous avons donc deux résultats importants : tout d'abord l'unité cachée des mathématiques constitue, en tant que points limites, les deux pôles individués – l'architecte et l'artisan – tout en les justifiant, mais surtout en justifiant leurs actions qui sont, *ipso facto*, enregistrées dans un projet commun. Ensuite, pour l'autre résultat lié plutôt à notre remarque sur les *rapprochements inattendus*, nous avons une remarque successive de M. Atiyah nous pousse encore vers un approfondissement ultérieur :

Les plus grandes surprises, [...], sont les liaisons inattendues entre des milieux mathématiques qui étaient apparemment fort éloignés.¹⁹

¹⁹ *Ibidem*, p. 88.

Il nous faut nous arrêter un moment à ces remarques, car elles sont partagées par plusieurs mathématiciens et il faut chercher d'expliquer cette attitude, car elle semble bien identifier un critère de beauté déterminant pour les mathématiciens. C'est pour cette raison que nous pouvons comprendre l'articulation des mathématiques au thème de la beauté qui est, en ce sens, toujours à l'arrière-plan. À ce sujet, considérons quelques exemples dont le premier est bien connu et a été suggéré par I. Lakatos.

Considérons cinq points différents dans le plan – disons A, B, C, D, E – représentant cinq pays différents et allons en relier deux entre eux par un segment lorsque les pays en question ont une frontière commune. Par exemple, considérons les segments AB, BC, CD, DA et soit le point E l'unique en dehors (pour fixer les idées) du quadrilatère $ABCD$. Si, par exemple, nous relions E avec A , nous obtenons $s = 5$ sommets, $a = 5$ arêtes, et $f = 2$ faces, à savoir ce qui est intérieur à $ABCD$ et ce qui y est extérieur. Calculons maintenant $v - a + f = 2$. Nous pouvons maintenant ajouter ou soustraire des sommets ou des arêtes afin de représenter une nouvelle carte géopolitique. En faisant après le calcul qu'on vient de présenter, on obtiendra le même résultat. En répétant l'expérimentation un certain nombre de fois, nous intuitionnons – bien sûr par la constance du résultat – qu'on est en train de découvrir une nouvelle propriété mathématique. En fait, la validité générale de la formule précédente a été démontrée par L. Euler. Le point crucial est que les mathématiciens ne s'arrêtent pas là. Cette obtention d'une certaine forme de généralisation n'est pas encore suffisante et, de toute façon, elle pousse vers autre chose. Que se passe-t-il lorsque nous remplaçons une feuille de papier par une surface courbée, par exemple une sphère ou par un tore ?

De fait, des nouvelles recherches sont parties des constatations qu'on vient d'énumérer et l'un des résultats de ces efforts a été le théorème de Gauss-Bonnet affirmant que l'intégrale de la courbure de Gauss sur une surface fermée est égale à 2π fois la caractéristique d'Euler-Poincaré. De surcroît, la liaison qui s'établit immédiatement entre la quantité analytique donnée par l'intégrale de la courbure gaussienne et la topologie est surprenante. Cela engendre un type de jouissance esthétique assez particulier. Un plaisir esthétique se réalisant pendant certains moments d'unification de la construction des mathématiques. Comme l'écrit J.M. Borwein :

La sensibilité esthétique (*aesthetic buzz*) ne dérive pas, tout simplement de la contemplation d'une belle partie des mathématiques, mais aussi d'une intuition couronnée par le succès.²⁰

²⁰ J.M. Borwein, *Aesthetic for working Mathematician* in [N. Sinclair, D. Pimm, W. Higginson] *Mathematics and Aesthetic. New Approaches to an Ancient Affinity*, CMS Books in mathematics, vol. 25 ; *op. cit.* ; p. 25.

Cette remarque s'applique aussi bien à l'exemple précédent qu'au prochain que nous allons construire sur le thème de la complétude stochastique dans les variétés riemanniennes. La complétude stochastique est la propriété des processus stochastiques qui ont un temps (*lifetime*) de vie infinie. Pour le mouvement brownien sur une variété riemannienne, cela signifie que la probabilité totale pour une particule d'être trouvée dans l'espace d'état est constamment égale à 1. Considérons maintenant u – une fonction de classe C^2 sur M . Si u a un maximum en $p \in M$, alors $\Delta u(p) \leq 0$ et $|\nabla u|(p) = 0$. Cette propriété peut être étendue au principe suivant, connu en littérature comme le principe de maximum de Omori-Yau. Si $u \in C^2(M)$ et $u^* = \sup_M u < +\infty$ alors il y a une séquence $\{x_k\} \subset M$, avec $k \in \mathbb{N}$, telle que $\forall k$:

$$u(x_k) > u^* - \frac{1}{k} \quad |\nabla u|(x_k) < \frac{1}{k} \quad \Delta u(x_k) < \frac{1}{k}.$$

Si nous nous libérons de la requête sur $|\nabla u|$, nous obtenons le principe de maximum faible. Afin de rendre valides les deux principes, nous devons fixer des contraintes supplémentaires.

Le fait surprenant est que la validité du principe faible de maximum sur M est équivalente à la propriété de la complétude stochastique pour le mouvement brownien.

Le pont qu'on établit entre la probabilité et un concept extrêmement riche d'utilisations de provenance analytique est inattendu et amène un grand nombre de conséquences. Pour ce qui en est de notre réflexion sur la beauté et aussi sur l'intérêt esthétique, il est clair que le résultat en question semble assez aisément confirmer les thèses énoncées par M. Atiyah (et autres) au sujet du caractère surprenant et presque *choquant* qu'un beau résultat peut avoir.

Pour approfondir nos analyses, considérons une autre suggestion qui nous provient du même travail de J.M. Borwein que nous avons déjà cité :

L'intérêt esthétique dérive, la plupart des fois, d'une certaine caractéristique : c'est-à-dire que cet intérêt s'origine de la capacité de raisonner au sujet d'un nombre inconnu d'objets par l'identification d'un point de vue restreint qui capture toutes les possibilités. Cela est un procédé qui n'est pas si différent de la méthode puissante de preuve connue sous le nom d'induction mathématique.²¹

En ce cas, le critère esthétique fonctionne de manière un peu différente par rapport aux résultats précédents. L'intérêt, à présent, est dans cette capacité dont dispose une création mathématique de réduire, de

²¹ *Ibidem*, p. 37.

regrouper dans une situation unitaire quelque chose qui semblait déga-
ger une sorte de pluralité, d'*embrouillamini*, de possibilités quelque peu
décousues. Comme exemple de cela, considérons la dernière preuve due
à L.M. Kelly²² d'un résultat originairement conjecturé par J.J. Sylvester et
prouvé pour la première fois par T. Grünwald :

Soient $n \geq 3$ points non colinéaires sur un plan, alors il existe une ligne
droite qui contient exactement deux de ceux-ci.

Pour le montrer, commençons par l'établissement de nouveaux ob-
jets constitués de la manière suivante : construisons toutes les *droites*
qui relient deux points de cet ensemble et considérons les couples
constitués par une droite de ce type et un point de l'ensemble en dehors
d'elle. Puisque les points sont en nombre fini, il y aura une droite de
connexion avec son point externe qui présente la condition de distance
plus petite de ce point extérieur²³. Pour fixer les idées, nommons les
éléments de cette droite particulière : utilisons Q et S pour indiquer
les deux points de la droite de connexion r et P pour indiquer le point
extérieur à r . Si par rapport à la condition présentée par le théorème, la
droite de connexion ne contient que ces deux points, la démonstration
est *ipso facto* terminée par l'obtention de la droite cherchée. La diffi-
culté est de démontrer que, pour cette droite r , il n'y a pas des points
ultérieurs qui en font partie. La démonstration procède par l'absurde
et donc imaginons qu'un point T , étant sur la droite r , ne respecte pas
cette condition et essayons de montrer que cela conduit à une contra-
diction. Pour ce faire, établissons que S soit entre H et T . Définissons
le point H indiquant l'intersection du segment perpendiculaire partant
de P avec la droite r et, enfin, définissons les droites de connexion q et
 t passant par P et opposant Q et T . Maintenant nous avons tout ce qu'il
faut : en fait si S est entre H et T , alors est plus proche de q que P de
 R . D'autre part, si S est entre Q et H , alors S est plus proche de t que
 P de r . Dans les deux cas, cela est en contradiction avec les conditions
établies pour définir r , Q , S et P .

²² Ce résultat avait été conjecturé par J.J. Sylvester en 1893. Dans l'usage actuel, il est
résolu par le théorème de Sylvester-Gallai. Il y en a eues plusieurs démonstrations dont
la principale est due à L.M. Kelly. On peut se référer à L.M. Kelly, W.O.J. Moser, On the
number of ordinary lines determined by n points in *Canadian Journal of Mathematics*,
n° 10, 1958 ; p. 210 – 219. Cf. aussi le problème 4065 posé par P. Erdős et résolu par
S. Steinberg in Three point collinearity (solution to problem 4065), in *American Math-
ematical Monthly*, n° 51, 1944 ; p. 169 – 171. Dans cet article on compare aussi à d'autres
résolutions et on cite les noms de R.C. Buck, T. Grünwald, N.E. Steenrod et, bien sûr,
de L.M. Kelly.

²³ S'il y a quelques points ayant la même distance de la droite, cela ne change rien à notre
démonstration. En ce cas, il suffit de choisir une seule de ces droites.

Seulement pour donner un autre exemple dans la même direction, considérons une configuration de points avec $n_{(p)} \geq 6$ et toutes les *droites de connexion* qui les relient. Maintenant, colorons quelques unes de ces droites en rouge. Il n'y a pas de doute que, par cette opération, on aura toujours du moins un triangle avec tous les côtés rouges ou un triangle avec tous les côtés noirs (avec le ou au sens logique habituel $\vee$). Pour le montrer, il suffit de dessiner les six points, disons A, B, C, D, E, F et considérons tous les segments partant de A et les reliant aux autres cinq points. Du moins trois de ces segments ont la même couleur : fixons que AB, AC et AF sont rouges. Poursuivons : en ce cas, si BC est rouge, on a terminé, car il y a déjà un triangle rouge. Si ce n'est pas le cas, considérons CF : s'il est rouge on a ce qu'on cherchait, s'il n'en pas le cas, le triangle BCF résout le problème par l'autre éventualité. En fait il est noir. Il faut remarquer que par $n_{(p)} \leq 5$ le théorème serait faux.

Théories

Jusqu'à présent nous avons considéré quelques exemples de beaux théorèmes ou de belles démonstrations dans la résolution de certains problèmes. Comme l'avait indiqué M. Atiyah, nous avons discuté du travail de l'artisan. Le moment est venu de faire quelques considérations – pour rester dans la même métaphore – sur le travail de l'architecte ou, encore, d'analyser de plus près ce que le mathématicien fait lorsqu'il crée de nouvelles théories, mais surtout lorsqu'il les considère ou les évalue aussi du point de vue esthétique. Par un souci ultérieur de précision terminologique, il nous faut spécifier la différence entre deux notions souvent superposées : théorie et structure. En fait, si une théorie est assez aisément encadrée et saisie, souvent la notion de structure se confond avec elle, car, surtout si l'on est conditionné par l'esprit de Bourbaki, une théorie est considérée comme toujours relative à une certaine structure. Mais il n'en est pas toujours le cas ; par exemple, lorsque nous discutons de théorie des nombres. Dans ce champ il est vraiment très difficile d'y trouver une structure et le même vaut, *mutatis mutandis*, pour la théorie des équations différentielles et ainsi de suite.

C'est-à-dire qu'on peut repérer assez aisément quelque chose comme une théorie ou, du moins, une amorce de théorie, mais il est beaucoup moins facile de détecter les éléments qui sont spécifiques des structures au sens bourbachique.

Dans ce qui suit, nous ne travaillerons pas avec les structures et, pour ainsi dire, nous nous contenterons des théories, car leur utilisation pour nos buts est déjà assez difficile.

Avant tout, d'une manière peut-être encore tout à fait intuitive, la communauté des mathématiciens considère une théorie comme un noyau solide de connaissances construit autour d'autres noyaux solides qui convergent en elle. Pensons, par exemple, à la théorie de l'intégration selon Lebesgue, à la théorie des groupes ou à la théorie des distributions pour n'en citer que trois. Pour donner un bon point de départ à toute analyse successive, nous pensons que le mathématicien à l'égard d'une théorie considère ce qui suit comme des éléments du moins souhaitables qu'une théorie devrait présenter :

1. Elle doit présenter une connaissance organisée.
2. Elle doit présenter une économie de pensée dans son exposition.
3. Les relations avec d'autres champs mathématiques doivent être bien éclaircies et explorées et cela doit, de toute manière, caractériser les théories. Autrement dit, une théorie prometteuse attire, déjà par ce caractère, l'intérêt des mathématiciens.
4. Elle devrait être riche en problèmes raisonnables et vivre dans la communauté des mathématiciens pour un temps assez long. Pendant ce temps, elle devrait résoudre les difficultés qui se présentent à son intérieur dans le cours de son développement.

Le dernier point est sans doute le plus important étant intimement connecté à la vie elle-même de la théorie et il caractérise ce que les mathématiciens apprécient dans les bonnes théories. Par exemple, considérons la théorie des applications méromorphes actuellement nommée de Nevanlinna-Ahlfors-Cartan. Dans un temps assez récent elle est revenue à l'attention de la communauté des mathématiciens après une certaine période de silence, par les travaux de H. Weyl, H.H. Wu et P. Griffiths et collaborateurs et par son application, couronnée par un succès lumineux, à l'étude des équidistributions de l'application de Gauss d'une surface minimale dans l'espace euclidien. En fait, après les efforts de plusieurs mathématiciens – parmi lesquels signalons S.S. Chern, R. Ossermann, F. Xavier et plusieurs d'autres – cette théorie a permis en 1993 à H. Fujimoto de prouver la belle généralisation du théorème de Picard : une surface minimale complète in $\mathbb{R}^3$ dont l'application gaussienne néglige au moins cinq points de la sphère est un plan. C'est à partir de ce moment que les chercheurs continuent activement les recherches en découvrant de nouveaux buts qui s'ensuivent presque naturellement de la théorie elle-même et cela est un élément capital d'une belle théorie mathématique. Pour mieux nous expliquer, il faut saisir le rôle que nous venons d'attribuer à l'architecte dans cette théorie : il prévoit et oriente le futur de la discipline. Le rôle de l'architecte consiste donc dans l'acte de prolonger les observations riches en développements possibles de R. Nevanlinna sur la généralisation du théorème de Picard et, par ce biais, il produit une belle construction présentant plusieurs ramifications et intersections avec plusieurs autres domaines des mathématiques.

Dans une direction presque opposée, il y a aussi d'autres cas qui montrent qu'une théorie, autrefois évaluée comme belle tout au long d'une certaine époque, peut, par après, disparaître presque complètement. Tel est le cas, par exemple, de plusieurs branches de la géométrie classique. L'unique remarque pertinente qu'on peut avancer à ce sujet concerne la constatation que les paradigmes déterminant le consensus ou l'appréciation d'une théorie changent au fur et à mesure que les pôles d'intérêt se modifient. Cela nous montre que le rôle joué par l'*institution symbolique* est toujours déterminant. Il suffit d'une petite modification d'une *tautologie symbolique* – où des équivalences stylistiques – pour impliquer des effets de ce type. Il se peut qu'une théorie soit, à une certaine époque, très intéressante pour une éventuelle application à un problème technologique et qu'elle aille lentement disparaître en raison de l'apparition d'une nouvelle théorie plus appropriée. Il y aussi des théories qui ont eu un grand succès en raison de leur intérêt philosophique impliquant, semblait-il, des profondes révolutions conceptuelles. Tel est le cas, par exemple, de la théorie des nombres transfinis de G. Cantor désormais pratiquement oubliée par la communauté des mathématiciens (mais non par les logiciens et les philosophes). Comme D. Hilbert l'a affirmé, une théorie est intéressante et importante pour autant qu'elle reste vivante. Peut-être qu'on peut appliquer la même remarque en ce qui concerne sa beauté.

Comme observation générale, la présentation d'une théorie satisfait le goût esthétique des mathématiciens qui préfèrent des démonstrations *sobres*, des argumentations bien balancées, des raisonnements symétriques et ainsi de suite. De manière un peu plus imagée on peut dire que le goût d'architecte du mathématicien tend à privilégier des structures qui font penser à la beauté classique bien représentée par un temple dorique. Sans approfondir la question, il nous faut remarquer le caractère presque opposé manifesté par le processus qui caractérise une belle démonstration : celle-ci est souvent particulièrement appréciée si elle montre un effet de surprise, un déséquilibre dynamique et une certaine dissymétrie qui donnent, pour ainsi dire, ce caractère piquant si intéressant pour les mathématiciens.

Remarques conclusives

Les discussions et les exemples donnés jusqu'à présent nous montrent clairement que les mathématiques ne sont pas un objet statique et que les critères pour définir la beauté de ses constructions se modifient et basculent en relation aux différentes périodes de leur histoire. Un bon exemple de ce changement historique peut être vu en analysant les for-

tunes de la formule d'Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ qui a été historiquement considérée la plus belle formule des mathématiques et qui est restée pour plusieurs mathématiciens et physiciens l'une des favorites (R. Feynman). Mais d'autres mathématiciens de notre époque la considèrent même trop triviale et, dans une certaine mesure, dépourvue d'un sens esthétique. Certainement, pour son appréciation – une appréciation quelque peu “primitive” pour quelques points de vue – il faut considérer que l'identité presque magique $e^{i\pi} + 1 = 0$ implique trois piliers de l'histoire des mathématiques, il s'agit évidemment de e , i et π .

Le fait de trouver une formule qui, d'une manière très simple, les implique tous semble être une sorte de consécration d'un travail bien accompli, terminé. Atteindre un palier important où certains casse-têtes, pour une fois, sont rendus productifs et fonctionnels les uns pour les autres, donne effectivement une forme de satisfaction. Et cela montre aussi bien du déséquilibre dynamique que du piquant. Certes, pour un goût postérieur où aussi bien l'analyse complexe que la transcendance de e et de π n'ont plus rien de mystérieux, cette formule peut paraître un peu naïve, voire un peu terne. C'est en ce sens que, pour plusieurs mathématiciens, la beauté mathématique montre des caractères fort subjectifs – sans que par là on doive interpréter ces caractères comme psychologiques – corrélés à certains champs d'intérêt, aux moyens techniques préférés, à l'expérience passée et ainsi de suite. Ces observations, nous semble-t-il, devraient rendre aisément compréhensible la difficulté de donner un critère stable afin de fixer la nature de la beauté mathématique contrairement à l'idée et, probablement, aux auspices de G. Hardy. D'ailleurs, et au fond il s'agit de la thèse complémentaire à celle que nous venons de refuser, nous n'acceptons également pas l'idée que la beauté mathématique consiste dans une beauté formelle statique. En fait, et cela condense aussi toutes nos observations précédentes, nous pensons qu'il y a un élément précieux de la beauté pour la sensibilité du mathématicien au travail : il apprécie, et nous à sa suite, la beauté mathématique des processus, des idées et des méthodes que nous employons en faisant concrètement des mathématiques à l'heure actuelle.

En ce sens, précisément en vertu de ce que nous avons soutenu jusqu'à présent, nous pouvons tirer quelques-uns des éléments essentiels qu'un théorème, une démonstration ou même qu'une théorie mathématique doivent posséder. Pour y arriver, il nous faut revenir à une idée que précédemment nous avons employée comme métaphore et qui impliquait une considération à l'apparence quelque peu banale : l'idée de la beauté qu'un mathématicien manifeste généralement est d'ordre assez classique. Les termes par lesquels nous avons caractérisé cette attitude, même si de manière inconsciente, sont toujours les mêmes : élégance, propreté, symétrie et, avant tout, la capacité de mettre en relation plusieurs champs

des mathématiques. C'est pour cela que nous avons introduit l'image, jouant le rôle d'une métaphore, du temple dorique pour caractériser la nature de la beauté des mathématiques recherchée par le mathématicien. La beauté austère d'un temple dorique rend tout à fait évidents ces caractères déjà soulignés d'un goût et d'une proportion interne. À savoir, mesure et pureté de lignes. Précisément comme dans un temple dorique. Par ailleurs, la question surgit immédiatement : d'où vient un goût de ce type ? Pourquoi, aussi dans les différentes manières de comprendre ce même progrès, le mathématicien reste assez lié – en considérant sa discipline – à ces canons de beauté en quelque sorte ultra-classiques qui gouvernent le sentiment esthétique de la communauté des mathématiciens et qui n'ont pratiquement subi aucune modification fondamentale ou importante dès l'époque d'Euclide ?

Ce serait une faute assez grave d'affirmer que le mathématicien a, après tout, à faire des mathématiques et n'a pas trop à perdre son temps dans des réflexions trop attentives au sujet de questions esthétiques très profondes. Il n'a pas de temps à perdre pour raffiner un goût esthétique qui donc pourrait rester assez grossier en relation à ce qui a été développé dans d'autres branches de la créativité humaine qui, souvent d'ailleurs, font de la quête du beau leur principal but artistique. Le défaut principal de cette approche consiste dans le fait de négliger que la recherche de la beauté joue un rôle essentiel du point de vue cognitif – comme nous l'avons déjà souligné – dans le travail mathématique. C'est-à-dire que la recherche et la construction de la beauté sont des éléments essentiels et donc non séparables au sens strict du travail mathématique. C'est à la suite de cette remarque que la caractérisation de la beauté mathématique devient essentielle pour une recherche philosophique visant à isoler les éléments fondamentaux des mathématiques. Pour ce faire, il faut bien saisir que le caractère essentiel de la beauté mathématique réside dans son opérativité. Pour donner quelques éléments supplémentaires – quelques prolégomènes, pour ainsi dire – d'une telle analyse, il nous faut revenir, encore une fois, à la métaphore de l'architecte et de l'artisan. La connexion interne de cette activité nous est exprimée aussi bien par les considérations précédentes – le travail des mathématiciens est à situer entre ces deux points extrêmes – et par une conséquence qui en découle directement : ni l'architecte, ni, encore moins, l'artisan ne peuvent être compris dans leur activité si on ne saisit pas que leur travail va *coudre un tissu commun*. Un *tissu commun* indique l'appartenance à un même projet expressif dont chaque élément est sous la responsabilité de chacune des deux figures par lesquelles nous venons de métaphoriser le travail des mathématiciens. Ce *tissu commun* s'articule en une floraison indéfinie d'horizons de possibilités créatives. Cet élément est vraiment capital : le travail mathématique est, en quelque sorte, fatalement orienté vers un

agrandissement progressif, vers une prolifération de ses horizons. Cela suggère une forme nouvelle de plaisir esthétique dans une direction que jusqu'à présent nous avons tout au plus esquissée : en un certain sens le plaisir esthétique est obtenu lorsqu'on découvre une unité, une continuité entre les différentes filières mathématiques. Et, en quelque sorte, cette recherche d'unité n'est jamais oubliée, elle est toujours sous-entendue dans l'activité mathématique. On ne renonce jamais à la quête de l'unité, même sous l'*impetus* des nouveaux résultats jaillissants par l'exploration d'horizons. C'est cette communauté d'ententes dans la diversité des approches qui nous montre le bon chemin : l'unité existe malgré (ou même grâce) ses apparences ; les mathématiques demeurent une. *Gens una sumus*. Et, en ce sens, la beauté en mathématiques redécouvre l'un des thèmes les plus classiques de la philosophie : *le retour du problème de la multiplicité dans la relation iridescente entre l'unité d'origine et du projet et la multiplicité des résultats*.

En ce sens, l'unité des mathématiques s'enclenche, à son tour, dans la grande unité du flux des créations idéales humaines. Par exemple, nous pouvons retrouver la quête et la nature aussi de cette unité dans les grandes architectures musicales. Et immédiatement nous vient à l'esprit le nom de J.-S. Bach. Il suffit de penser à *L'offrande musicale* (BWV 1079) où la créativité du mathématicien s'exprime à partir de l'unité du thème, le *Thema Regium*. Autrement dit, une créativité qui s'exprime à partir d'une cellule significative élémentaire et qui prolifère comme lors d'une explosion contrôlée. Peut-être que cette puissance créatrice s'exprime bien par l'un des Canons les plus célèbres de cette composition, le *Quaerendo invenietis* (*En cherchant, vous trouverez*) qui semble aussi bien résumer ce que nous entendions caractériser comme l'élément crucial du travail du mathématicien. Il résume aussi bien le travail de l'architecte – capable d'imaginer et de créer une grande structure, capable donc d'une sorte de *grand rêve* – et de l'artisan dont le travail, à l'apparence plus modeste, s'occupe proprement de coudre et recoudre l'acte de *chercher* et l'acte de *trouver*.

Encore dans le travail de J.-S. Bach on peut retrouver des autres éléments capables de rendre au mieux la métaphore de la création mathématique. Pensons, par exemple, à sa dernière composition : le célèbre *Art de la Fugue* (BWV 1080). En raison de la mort de l'auteur, le *Contrepoint XIV* reste inachevé. Et la métaphore est prête pour l'utilisation : le matériau de base, le thème, se développe, croît sur lui-même, travaille incessamment. L'absence d'une conclusion formelle, même en présence de plusieurs conclusions partielles – les contrepoints formant l'*Art de la Fugue* – nous pousse de plus en plus en avant. Vers l'enrichissement perpétuel de cette structure, avec un éloignement correspondant des horizons qui s'ouvrent à chaque pas. Prolifération et multiplication dans

l'unité. On peut bien penser à une nouvelle définition tentant de rendre raison du maintien de cette unité dans la variété multicolore des images différentes par lesquelles ces moments de la créativité humaine s'offrent. Il faut avoir le courage de l'affirmer : aussi bien les musiciens que les mathématiciens sont des créateurs d'univers.

Ce thème est depuis toujours l'une des sources principales de la réflexion philosophique. Et l'une des synthèses les plus belles de tout ce que cela implique a été donnée par Platon lorsqu'en caractérisant l'action du Démon, il écrit :

Lorsque Dieu entreprit d'ordonner le tout, au début, le feu, l'eau, la terre et l'air portaient des traces de leur propre nature, mais ils étaient tout à fait dans l'état où tout se trouve naturellement en l'absence de Dieu. C'est dans cet état qu'il les prit, et il commença par leur donner une configuration distincte au moyen des idées et des nombres. Qu'il les ait tirés de leur désordre pour les assembler de la manière la plus belle et la meilleure possible, c'est le principe qui doit nous guider constamment dans toute notre exposition.²⁴

Nous pouvons terminer ici, en ajoutant une petite observation qui nous permet de fermer le cercle idéal ouvert par le texte d'H. Weyl que nous avons mis en exergue : nous ne savons pas et, probablement, nous ne saurons jamais si ce que Platon a écrit est vrai, mais sans doute c'est beau. Et, pour maintenant, mais pour maintenant seulement, cela peut nous suffire.

²⁴ Platon, *Timée* 52C - 53C. Nous avons pris cette citation à Platon, *Sophiste, Politique, Philèbe, Timée, Critias*, GF Flammarion, Paris, 1991 ; p. 431.

Alcune osservazioni fenomenologiche sulla bellezza nella matematica

L'articolo propone un'analisi fenomenologica della nozione di bellezza in matematica, muovendo dall'esperienza concreta dei matematici e dalle loro pratiche effettive, piuttosto che da interpretazioni esterne o puramente estetiche. Gli autori mostrano come la bellezza matematica non possa essere ridotta a un criterio formale o soggettivo, ma emerga da una pluralità di caratteri – quali chiarezza, sorpresa, unificazione, fecondità concettuale – che si manifestano in modo differenziato nelle dimostrazioni, nei teoremi e nella costruzione delle teorie. Attraverso riferimenti a matematici come Gauss, Hardy, Rota, Atiyah e Mac Lane, e mediante esempi tratti dall'analisi, dalla geometria e dalla probabilità, l'articolo mette in luce il ruolo cognitivo della bellezza, intesa come guida alla comprensione e come principio di orientamento della ricerca. In dialogo con la fenomenologia husserliana e con contributi di Merleau-Ponty e Richir, la bellezza viene infine interpretata come espressione di uno stile e di una “armonizzazione” interna alle istituzioni simboliche della matematica, radicate nella loro storia e nella loro dimensione culturale.

PAROLE CHIAVE: Mathematical beauty; Fenomenologia; Pratica matematica; Stile e armonia; Filosofia della matematica

Some phenomenological remarks on beauty in mathematics

The paper offers a phenomenological analysis of mathematical beauty, starting from the concrete experience of mathematicians and their actual practices rather than from external or purely aesthetic interpretations. The authors argue that mathematical beauty cannot be reduced to a formal or subjective criterion, but emerges from a plurality of features—such as clarity, surprise, unification, and conceptual fruitfulness—which appear in different ways in proofs, theorems, and the construction of theories. Drawing on reflections by mathematicians such as Gauss, Hardy, Rota, Atiyah, and Mac Lane, and through examples taken from analysis, geometry, and probability theory, the paper highlights the cognitive role of beauty as a guide to understanding and as an orienting principle in mathematical research. In dialogue with Husserlian phenomenology and with contributions from Merleau-Ponty and Richir, beauty is ultimately interpreted as the expression of a style and of an internal “harmonization” within the symbolic institutions of mathematics, rooted in their historical and cultural dimension.

KEYWORDS: Mathematical beauty; Phenomenology; Mathematical practice; Style and harmony; Philosophy of mathematics